

Numerische Behandlung zeitabhängiger akustischer Streuung im Außen- und Freiraum

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig
angenommene

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades

DOCTOR RERUM NATURALIUM
(Dr. rer. nat.)

im Fachgebiet

Mathematik

vorgelegt

von Master of Science Volker Gruhne
geboren am 24.06.1983 in Leipzig

Die Annahme der Dissertation wurde empfohlen von:

1. Professor Dr. Dr. h.c. Wolfgang Hackbusch (MPIMN Leipzig)
2. Professor Dr. Christian Lubich (Universität Tübingen)

Die Verleihung des akademischen Grades erfolgt auf Beschluss des Rates der Fakultät für Mathematik und Informatik vom 17.04.2013 mit dem Gesamtprädikat magna cum laude.

Bibliographische Daten

Numerische Behandlung zeitabhängiger
akustischer Streuung im Außen- und Freiraum
Gruhne, Volker
Universität Leipzig, Dissertation, 2013
105 Seiten, 16 Abbildungen, 95 Referenzen

Danksagung

Diese Dissertation wurde am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig im Rahmen der Forschungsgruppe *Numerical methods for time domain acoustics and electromagnetism* angefertigt und zahlreichen Mitgliedern gebührt mein Dank.

Zunächst möchte ich Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Hackbusch für die Möglichkeit danken, dass ich diese Dissertation unter hervorragenden Bedingungen in angenehmer Arbeitsatmosphäre schreiben konnte.

Ein ganz besonderer Dank geht an Herrn Dr. Lehel Banjai für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit. Seine motivierenden Hinweise und Anregungen, seine kritischen Kommentare aber vor allem auch die Zurverfügungstellung seiner Erfahrungen und seines Fachwissens besonders auf dem Gebiet der Numerik waren eine wertvolle Unterstützung und haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Für die Übernahme der Begutachtung dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Hackbusch sowie Herrn Prof. Dr. Christian Lubich.

Ein weiteres Dankeschön richte ich an meine Kollegin der Forschungsgruppe, Maryna. Dass Maryna in Fragen der Programmierung stets mit Rat zur Seite stand, hat zum Entstehen der Arbeit beigetragen.

Ich möchte mich auch speziell bei Jonas und Peter für die zielführenden Diskussionen während des Entstehungsprozesses dieser Arbeit bedanken. Ronald gilt mein Dank für seine Hilfe bei Problemen mit der Hlibpro-Programmbibliothek. Allen, die nicht namentlich genannt sind, die mich dennoch unterstützt haben, sei es durch fachlichen Rat oder menschlichen Zuspruch, sei ebenfalls mein Dank versichert.

Abstract

Linear hyperbolic partial differential equations in a homogeneous medium, e.g., the wave equation describing the propagation and scattering of acoustic waves, can be reformulated as time-domain boundary integral equations. In the first part of this thesis we propose an efficient implementation of a numerical discretization of such equations when Huygens' principle does not hold.

For the numerical discretization, we make use of convolution quadrature in time and standard Galerkin boundary element method in space. The quadrature in time results in a discrete convolution of weights W_j with the boundary density evaluated at equally spaced time points. If Huygens' principle holds, W_j converge to 0 exponentially quickly for large enough j . If Huygens' principle does not hold, e.g., in even space dimensions or when some damping is present, the weights are never zero, thereby presenting a difficulty for efficient numerical computation.

In the first main part of this thesis we prove that the kernels of the convolution weights approximate in a certain sense the time domain fundamental solution and that the same holds if both are differentiated in space. The tails of the fundamental solution being very smooth, this implies that the tails of the weights are smooth and can efficiently be interpolated. Further, we hint at the possibility of applying the fast and oblivious convolution quadrature algorithm of Schädle et al. to further reduce memory requirements for long-time computation. We discuss the efficient implementation of the whole numerical scheme and present a large-scale numerical experiment.

In the second main part of this thesis we consider transmission problems for the wave equation in free space. They are usually treated in such a way, that the free space is divided into an unbounded exterior domain and a bounded interior domain, so that possible nonlinearities or inhomogeneities of the material are strictly contained in the interior domain. Both domains are then analyzed as independently as possible and combined via the transmission conditions across the common boundary.

We discuss a coupling strategy that makes use of different time discretization schemes for the interior and exterior subdomain. In particular, we will use an explicit scheme in the interior and a linear multistep based convolution quadrature method in the exterior domain. We base the coupling on the one-equation approach applying direct boundary integral method. Stability and convergence for the discrete scheme will be derived. We also present numerical examples that underline the applicability of the coupling scheme.

Kurzfassung

Lineare hyperbolische partielle Differentialgleichungen in homogenen Medien, beispielsweise die Wellengleichung, die die Ausbreitung und die Streuung akustischer Wellen beschreibt, können im Zeitbereich mit Hilfe von Randintegralgleichungen formuliert werden. Im ersten Hauptteil dieser Arbeit stellen wir eine effiziente Möglichkeit vor, numerische Approximationen solcher Gleichungen zu implementieren, wenn das starke Huygens-Prinzip nicht gilt.

Wir nutzen die Faltungsquadraturmethode für die Zeitdiskretisierung und eine Galerkin-Randelement-Methode für die Raumdiskretisierung. Mit der Faltungsquadraturmethode geht eine diskrete Faltung der Faltungsgewichte W_j mit der Randdichte einher. Bei Gültigkeit des starken Huygens-Prinzips konvergieren die Gewichte W_j exponentiell gegen null, sofern j hinreichend groß ist. Im gegenteiligen Fall, das heißt bei geraden Raumdimensionen oder wenn Dämpfungseffekte auftreten, kann kein Verschwinden der Gewichte beobachtet werden. Das führt zu Schwierigkeiten bei der effizienten numerischen Behandlung.

Im ersten Hauptteil dieser Arbeit zeigen wir, dass die Kerne der Faltungsgewichte in gewisser Weise die Fundamentallösung im Zeitbereich approximieren und dass dies auch zutrifft, wenn beide bezüglich der räumlichen Variablen abgeleitet werden. Da die Fundamentallösung zudem für genügend große Zeiten, etwa nachdem die Wellenfront vorbeigezogen ist, glatt ist, schließen wir Gleiches auch in Bezug auf die Faltungsgewichte, die wir folglich mit hoher Genauigkeit und wenigen Interpolationspunkten interpolieren können. Darüber hinaus weisen wir darauf hin, dass zur weiteren Einsparung von Speicherkapazitäten, insbesondere bei Langzeitexperimenten, der von Schädle et al. entwickelte schnelle Faltungsalgorithmus eingesetzt werden kann. Wir diskutieren eine effiziente Implementierung des Problems und zeigen Ergebnisse eines numerischen Langzeitexperimentes.

Im zweiten Hauptteil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Transmissionsproblemen der Wellengleichung im Freiraum. Solche Probleme werden gewöhnlich derart behandelt, dass der Freiraum, wenn nötig durch Einführen eines künstlichen Randes, in ein unbeschränktes Außengebiet und ein beschränktes Innengebiet geteilt wird mit dem Ziel, eventuelle Inhomogenitäten oder Nichtlinearitäten des Materials vollständig im Innengebiet zu konzentrieren. Wir werden eine Lösungsstrategie vorstellen, die es erlaubt, die aus der Teilung resultierenden Teilprobleme so weit wie möglich unabhängig voneinander zu behandeln. Die Kopplung der Teilprobleme erfolgt über Transmissionsbedingungen, die auf dem ihnen gemeinsamen Rand vorgegeben sind.

Wir diskutieren ein Kopplungsverfahren, das auf verschiedene Diskretisierungsschemata für das Innen- und das Außengebiet zurückgreift. Wir werden insbesondere ein explizites Verfahren im Innengebiet einsetzen, im Gegensatz zum Außengebiet, bei dem wir ein auf ein Mehrschrittverfahren beruhendes Faltungsquadraturverfahren nutzen. Die Kopplung erfolgt nach der Strategie von Johnson und Nédélec, bei der die direkte Randintegralmethode zum Einsatz kommt. Diese Strategie führt auf ein unsymmetrisches System. Wir analysieren das diskrete Problem hinsichtlich Stabilität und Konvergenz und unterstreichen die Einsatzfähigkeit des Kopplungsalgorithmus mit der Durchführung numerischer Experimente.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Integraloperatoren	6
1.2	Faltungsquadratur	10
1.3	Ein rekursiver Algorithmus zur Lösung der diskreten Faltung	14
1.4	Integralformulierung der Wellengleichung und numerische Lösungsmethoden	17
1.5	FEM-BEM-Kopplung nach Johnson und Nédélec	22
2	Effiziente Berechnung von Randintegralgleichungen im Zeitbereich	25
2.1	Problembeschreibung	26
2.2	Approximation der Fundamentallösung	29
2.3	Algorithmische Aspekte	40
2.3.1	Interpolation der Gewichtsfunktionen	40
2.3.2	Algorithmische Umsetzung	41
2.3.3	Anmerkungen zur Anwendung des schnellen Faltungsalgorithmus .	44
2.4	Numerisches Beispiel	45
2.4.1	Approximationseigenschaft der Gewichtsfunktionen	45
2.4.2	Ein Langzeitexperiment	47
3	FEM-CQ-BEM-Verfahren zur Lösung von Transmissionsproblemen der Wellengleichung	50
3.1	Problembeschreibung	51
3.2	Lösen von Transmissionsproblemen der Wellengleichung	52
3.2.1	Kontinuierliches Problem	52
3.2.2	Diskretes Problem	58
3.2.3	Modifizierte Kopplungsstrategie	76
3.2.4	Algorithmische Umsetzung	82
3.3	Numerische Experimente	83
4	Zusammenfassung und Ausblick	96
	Literaturverzeichnis	99

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung von Innen- und Außengebiet	5
1.2	Schematische Veranschaulichung des rekursiven Algorithmus	16
2.1	Darstellung ausgewählter Gewichtsfunktionen	28
2.2	Entwicklung von t_J , wenn $\Delta t \rightarrow 0$	36
2.3	Veranschaulichung der rekursiven Lösungsstrategie	42
2.4	Entwicklung des Fehlers $ \omega_n^{\Delta t}(1) - \Delta t \cdot k(1, t_n) $ für $\Delta t \rightarrow 0$	46
2.5	Langzeitexperiment: Absoluter Fehler $ \varphi^{\Delta t}(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t) $	48
3.1	Experiment 1 auf grobem Zeitgitter im Außenraum beziehungsweise mit unstetigen Eingangsdaten	76
3.2	Schematische Darstellung des Kopplungsalgorithmus	84
3.3	Untersuchung der Dirichlet-zu-Neumann-Approximation zu den Experi- menten 1 und 2	87
3.4	Erstes numerisches Experiment	90
3.5	Zweites numerisches Experiment	92
3.6	Darstellung des Innengebietes zu Experiment 3	92
3.7	Gitter des Innengebietes zu Experiment 3	93
3.8	Untersuchung der Dirichlet-zu-Neumann-Approximation zu Experiment 3 .	94
3.9	Drittes numerisches Experiment	95

Einleitung

Wenn von Akustik die Rede ist, wird fast unweigerlich die Konstruktion von Opernhäusern oder Konzertsälen assoziiert. Hierbei wird das physikalische Wissen vor allem eingesetzt, um Räume mit optimalen Klangeigenschaften zu schaffen. Längst bieten die physikalische und technische Akustik eine facettenreichere Bandbreite an Einsatzmöglichkeiten, die inhaltlich weit über das Nächstliegende hinausgeht. Vor allem im dritten Quartal des vergangenen Jahrhunderts kam es zu einer wahren Explosion auf dem Forschungsfeld der physikalischen Akustik, die dazu führte, dass sich besonders in den Ingenieurwissenschaften eine Vielzahl neuer Forschungsrichtungen auftat.

Neben der Schallerzeugung und der Schallrezeption liegt ein besonderer Fokus auf der Schallausbreitung. So beschäftigen sich allein unzählige Veröffentlichungen mit der Gestaltung von Blasinstrumenten. Das Ziel besteht dabei darin, die Gestalt des entsprechenden Instrumentes derart zu optimieren, dass Reflexionen im Schallkörper minimiert werden und infolgedessen eine klarere Intonation erreicht werden kann; siehe z. B. [7, 92].

Darüber hinaus gibt es auch Anwendungsbeispiele, in denen die Vorhersage der Wellenausbreitung helfen soll, Schalleffekte zu unterdrücken. Als ein Beispiel können die Untersuchungen zur Lärmreduzierung dienen, die an Windkraftanlagen oder Helikoptern vorgenommen werden. Ein konkretes Ziel besteht darin, die Rotorblätter so zu gestalten, dass der Luftwiderstand möglichst gering ist, um unangenehme Schalleffekte, den sogenannten Störschall, für die Umgebung zu unterdrücken; siehe z. B. [70, 91].

Auf dem Gebiet der Seismologie werden akustische Wellen genutzt, um Erdbebenszenarien zu simulieren. Diese Erkenntnisse sollen in der Realität helfen, eventuelle Schwächen beispielsweise in Bezug auf die Statik von Gebäuden oder Brücken aufzudecken, sodass die mit zukünftigen Beben verbundenen Schäden begrenzt oder gar Leben gerettet werden können; siehe z. B. [2, 39].

Die Liste der Anwendungsgebiete ist damit noch lange nicht erschöpft, aber schon diese Auswahl deutet die große Vielfalt an. Allen Anwendungsgebieten sind numerische

Berechnungen gemeinsam, bei denen hyperbolische partielle Differentialgleichungen oft auch mehrfach gelöst werden müssen. Das stellt nicht nur eine Herausforderung an die Speicherkapazitäten, sondern in erster Linie auch hohe Anforderungen an die Rechenleistung und -geschwindigkeit moderner Computer. Bei der Entwicklung und Umsetzung numerischer Verfahren kommt es deshalb neben hoher Genauigkeit und Robustheit auch auf Schnelligkeit und effektives Ressourcenmanagement an.

Der erste Schwerpunkt dieser Arbeit wird auf das Lösen hyperbolischer partieller Differentialgleichungen in einem räumlich unbegrenzten Außengebiet gelegt. Wir verzichten auf eine direkte Behandlung der Differentialgleichung und wählen stattdessen die Möglichkeit, sie in Form einer Randintegralgleichung darzustellen. Diese Herangehensweise hat bei der numerischen Lösung elliptischer Differentialgleichungen eine lange und erfolgreiche Tradition, wie etwa die Monografien [75, 80, 88] zeigen. Die Anwendung dieser eleganten Methode bei der Lösung hyperbolischer Probleme reicht zwar zurück in die frühen 1960er Jahre des vergangenen Jahrhunderts, siehe [43], erfuhr aber erst in den letzten Jahren eine Wiederbelebung. Das unterstreichen die Arbeiten [41] und [51]. Die Arbeit [29] gibt einen zusammenfassenden Überblick.

In Bezug auf die zeitliche Diskretisierung werden wir die in [73] beschriebene Technik der Faltungsquadratur anwenden. Diese Technik wurde in den späten 1980er Jahren in den Arbeiten [71] und [72] eingeführt. Sehenswert ist in diesem Zusammenhang auch die Zusammenstellung in [12] oder [74]. Die Strategie der Faltungsquadratur ermöglicht es, gängige Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der für die Raumdiskretisierung verwendeten Randelementmethode zu verbinden. Dem Faltungsquadraturverfahren werden die uneingeschränkten Stabilitätseigenschaften der zugrunde liegenden A-stabilen Zeitdiskretisierungsmethode übertragen. Zudem ist bei diesem Ansatz nicht die explizite Kenntnis der Kernfunktion der Integralgleichung notwendig. Vielmehr findet ihre Laplace-Transformierte Anwendung, die als eine einfachere analytische Funktion besser zu handhaben ist.

Soll die ungedämpfte Wellengleichung in drei Raumdimensionen gelöst werden, ist das Huygens-Prinzip gültig; siehe [49]. In [55] wird gezeigt, wie dieses ausgenutzt werden kann, um die aus der Raumdiskretisierung der Faltungskoeffizienten entstehenden voll besetzten Matrizen zu umgehen. Es wird vorgeschlagen, die voll besetzten Matrizen durch spärlich besetzte zu approximieren. Auf diese Weise werden durch Ausnutzung sowohl des Huygens-Prinzips als auch der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen Speicheranforderungen verringert und Rechenzeiten verkürzt. Diese Lösungsstrategie stößt jedoch bei auftretenden Dämpfungseffekten oder in geraden Raumdimensionen an ihre Grenzen, da in diesem Zusammenhang das Huygens-Prinzip versagt; siehe [56] und [4].

Im ersten Teil dieser Arbeit stellen wir am Beispiel der Wellengleichung eine Möglichkeit vor, mit deren Hilfe auch in den Fällen, in denen diese Lösungsstrategie scheitert, eine effiziente numerische Berechnung der Lösung hyperbolischer partieller Differentialgleichungen möglich ist. Hier fließen Ideen und Erkenntnisse ein, die bereits in [9] veröffentlicht wurden.

Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit wird auf das Lösen von Transmissionsproblemen gelegt, wie sie in vielen Bereichen der Physik auftreten. Sie zeigen sich vor allem in Form von Streuproblemen, bei denen eine einfallende akustische oder auch elektromagnetische Welle auf ein Objekt, etwa ein Flugzeug, auftrifft und abgelenkt wird. Bei dem direkten Streuproblem interessieren wir uns bei Kenntnis des Streuobjektes und der einfallenden Welle für das Verhalten der am Hindernis gestreuten Welle. Als gestreute Welle bezeichnet man dabei den Unterschied zwischen der Welle, die aufgrund der Störung durch das Hindernis entsteht, und derjenigen Welle, die sich ausbreiten würde, wenn das Hindernis nicht vorhanden wäre.

Das Transmissionsproblem wird im Allgemeinen derart behandelt, dass das unbeschränkte Gebiet gegebenenfalls durch Einführung eines künstlichen Randes zunächst in ein Außen- und ein Innengebiet geteilt wird mit dem Ziel, eventuelle Inhomogenitäten oder Nichtlinearitäten im Innengebiet zu konzentrieren. Auf diese Weise können anschließend Randelementmethoden genutzt werden, um das Problem außerhalb des eingeführten Randes zu lösen, wohingegen Finite-Elemente-Methoden beim Lösen des Randwertproblems im beschränkten Innengebiet eingesetzt werden. Beide Teilprobleme stehen über Transmissionsbedingungen, die auf dem ihnen gemeinsamen Rand gestellt werden, miteinander in Beziehung. Eine zur Randelementmethode alternative Möglichkeit das Außenraumproblem zu bearbeiten, besteht darin, den Außenraum zu begrenzen und mit einer absorbierenden Schicht zu umgeben. In diesem speziellen, verlustbehafteten Gebiet wird die sich ausbreitende Welle absorbiert. Dieser Ansatz der Perfectly-Matched-Layer (PML) wurde erstmals von Bérenger entwickelt, siehe [14], und später auf verschiedene Weise modifiziert. Da die Reflexionen beliebig klein gehalten werden können, liefert die PML-Methode sehr genaue Ergebnisse auf der kontinuierlichen Ebene. Diese Eigenschaft kann jedoch bei der Diskretisierung verloren gehen; siehe [90].

Einer der ersten Versuche einer Kopplung von Finite-Elemente-Methoden und Randelementmethoden findet sich in [87]. Heute zählen insbesondere die Arbeiten [20, 21, 95] zu den Pionierwerken im Bereich der Kopplung Finite-Elemente-Methoden an Randelementmethoden bei stationären Problemen. Die ersten bedeutsamen Ergebnisse, die ein theoretisches Fundament für diese Art Kopplung aufbauten, gehen auf Johnson und Nédélec zurück, siehe [60], und wurden in [93, 94] weiter verallgemeinert. Zur Darstellung der Lösung im Außenraum kommt hier die Green-Formel zum Einsatz. Das so erzeugte nicht-lokale Randwertproblem wird an das innere Neumann-Problem gekoppelt. Die theoretische Berechtigung dieser Methode war eng an die Kompaktheit des einbezogenen Randintegraloperators des Doppelschichtpotentials geknüpft. In dem Artikel [83] wurde das theoretische Fundament, zumindest für partielle Differentialgleichungen vom Laplace- oder Yukawa-Typ, auf Lipschitz-Ränder erweitert, auf Fälle also, in denen der Randintegraloperator des Doppelschichtpotentials nicht kompakt ist. Einen weiteren Ansatz zeigt die modifizierte Herangehensweise in den Arbeiten [28, 79] und [58]. Im Gegensatz zur originären Methode von Johnson und Nédélec, die auf ein unsymmetrisches System führt, wird hier eine zusätzliche Integraldarstellung für die Normalenableitung auf dem Rand genutzt. Insbesondere führt der Ansatz von Costabel und Polizzotto zu einem symmetrischen System, das den hypersingulären Randintegraloperator verwendet.

Eine weitere Lösungsstrategie wird in [59] eingeführt. Der wesentliche Unterschied zum Johnson-Nédélec-Ansatz besteht darin, dass hier die nicht-lokale Randbedingung über eine indirekte Methode, das heißt mit Hilfe eines Einfachschichtpotentialansatzes, abgeleitet wird. Das führt auf ein quasisymmetrisches System, das ohne den hypersingulären Randintegraloperator auskommt. Durch eine konvexe Linearkombination des Johnson-Nédélec-Ansatzes und der letztgenannten Modifikation entsteht die Kopplung nach Bielak und McCamy; siehe [15].

Die Herausforderung bei zeitabhängigen Problemen, sowohl im analytischen als auch im algorithmischen Sinn, besteht im Wesentlichen darin, die Stabilität des Kopplungsverfahrens sicherzustellen, da wir für das Außen- und das Innenraumproblem unterschiedliche Zeitdiskretisierungsmethoden und verschiedene Zeitschrittweiten verwenden. Während verschiedene technisch orientierte Beiträge existieren, vorwiegend in Verbindung mit Finite-Elemente-Methoden im Innenraum und Kollokationsmethoden auf dem Rand, ist aus rein mathematischer Sicht weit weniger zu finden. Varianten der Umsetzung der Kopplung im Zeitbereich unter Zuhilfenahme von Randintegraloperatoren werden zum Beispiel in [1] und [47] diskutiert. Eine Alternative zum Einsatz abweichender Zeitschrittweiten innerhalb der Gebiete stellt die Wahl lokaler Schrittweiten dar; siehe [24, 25, 36]. Bei dieser Variante bedient man sich kleinerer Zeitschritte lediglich in einem Teilgebiet des Finite-Elemente-Gitters, in dem sich kleine Elemente befinden.

Wir bemerken, dass in der Arbeit [10], die sich zum gegenwärtigen Zeitpunkt in Bearbeitung befindet, ebenfalls Transmissionsprobleme der Wellengleichung untersucht werden. Im Gegensatz zur Kopplungsstrategie, die in dieser Arbeit verfolgt wird, werden darin die beiden Teilprobleme im Innen- und Außengebiet derart gekoppelt, dass sich ein symmetrisches Schema ergibt. Während die Galerkin-Diskretisierung dieser Kopplungsstrategie keine Schwierigkeiten bereitet, ist die Implementierung numerischer Experimente jedoch aufwändiger.

Im zweiten Teil der Arbeit stellen wir eine Möglichkeit vor, Transmissionsprobleme der Wellengleichung zu behandeln. Zur Lösung verbinden wir Randintegralmethoden für Probleme im Außenraum mit der Finite-Elemente-Methode im Innengebiet. Im Unterschied zu gängigen Vorgehensweisen erfolgt die Zeitdiskretisierung im Außenraum dabei mittels der Faltungsquadratur, sodass wir einerseits im Zeitbereich arbeiten, andererseits die Vorteile der Randintegraloperatoren im Frequenzbereich nutzen. Das zugrunde gelegte Transmissionsproblem wird mit dem Ansatz von Johnson und Nédélec behandelt.

Die Arbeit ist in zwei Hauptteile gegliedert. Im direkten Anschluss diskutieren wir für diese Arbeit wesentliche Grundlagen. An dieser Stelle gehen wir auf wichtige Verfahren und Konzepte ein, die für die nachfolgenden Kapitel eine wichtige Rolle spielen. Insbesondere fassen wir die für den Rahmen dieser Arbeit wesentlichen Eigenschaften der Randintegraloperatoren zusammen und skizzieren die grundlegenden Gedanken der Faltungsquadraturmethode sowie eines rekursiven Algorithmus zum numerischen Lösen zeitabhängiger Randwertprobleme, die auf einem Freiraum formuliert sind. Das Ziel der weiteren Arbeit ist zweifach. Das zweite Kapitel widmet sich dem Lösen hyperbolischer partieller Differentialgleichungen in einem räumlich unbegrenzten Außengebiet und damit

dem ersten Hauptteil der Arbeit. Wir zeigen, wie eine effiziente Berechnung der Lösung erfolgen kann, wenn zusätzliche Eigenschaften wie beispielsweise das Huygens-Prinzip nicht ausgenutzt werden können. Es folgt in Kapitel 3 der zweite Hauptteil. Darin entwickeln wir eine Möglichkeit der Lösung von Transmissionsproblemen der Wellengleichung, bei der im Außenraum die Randintegralmethode und im Innenraum die Finite-Elemente-Methode zum Einsatz kommt. Abschließend ziehen wir in Kapitel 4 ein Fazit der Ergebnisse und geben einen Ausblick auf Erweiterungsmöglichkeiten und Anknüpfungspunkte ergänzender Studien.

Notationen und Bezeichnungen

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung bezüglich der innerhalb dieser Arbeit verwendeten Notation. In den folgenden Kapiteln werden wir mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, offene, beschränkte Gebiete mit Lipschitz-Rand $\Gamma := \partial\Omega$ bezeichnen, das heißt, Γ erlaubt in Hinblick auf jede Zerlegung eine stückweise Darstellung durch Lipschitz-stetige Funktionen. Häufig werden wir sowohl auf das beschränkte Innengebiet $\Omega^- := \Omega$ als auch auf das unbeschränkte Außengebiet $\Omega^+ := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}$ zurückgreifen. Beide Gebiete besitzen den gemeinsamen Rand $\partial\Omega^+ = \partial\Omega^- = \Gamma$. Die Situation wird in Abbildung 1.1 illustriert.

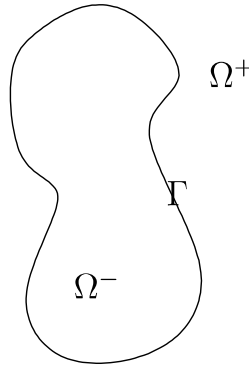


Abbildung 1.1: Darstellung des Innengebietes Ω^- und des Außengebietes Ω^+ mit Lipschitz-Rand Γ

Zudem werden wir in der Folge elementare Eigenschaften spezieller Hilbert-Räume nutzen, ohne dazu spezielle Referenzen anzugeben. Wir verweisen an dieser Stelle allgemein auf die Literatur zu diesem Themenschwerpunkt, etwa [80] oder [88]. Für Gebiete Ω verwenden wir den Raum $L^2(\Omega)$, die Menge der über Ω quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen, aber auch die Standard-Sobolev-Räume $H^k(\Omega)$, $k = 1, 2$, die Funktionen aus $L^2(\Omega)$ enthalten, deren k -te schwache Ableitung ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegt. Mit $H_\Delta^1(\Omega)$ bezeichnen wir schließlich den Sobolev-Raum mit Funktionen $u \in H^1(\Omega)$, für die $\Delta u \in L^2(\Omega)$ liegt. Das Skalarprodukt des $L^2(\Omega)$ -Raumes notieren wir mit $(\cdot, \cdot)_\Omega$, die Norm durch $\|\cdot\|_\Omega$. Die $H^k(\Omega)$ -Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_k$. An geeigneter Stelle werden wir auch von der gewichteten $H^1(\Omega)$ -Norm $\|u\|_{1,\delta}$ mit $\|u\|_{1,\delta}^2 := \delta^2 \|u\|_\Omega^2 + \|\nabla u\|_\Omega^2$ Gebrauch machen. Außerdem kommen die fraktionalen Sobolev-Räume $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ auf dem Rand $\partial\Omega = \Gamma$ zum Einsatz, die mit den Normen $\|\cdot\|_{\pm 1/2}$ ausgestattet sind. Das

Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ zwischen den Sobolev-Räumen $H^{-1/2}(\Gamma)$ und $H^{1/2}(\Gamma)$ verstehen wir als Sesquilinearform mit Linearität im ersten und konjugierter Linearität im zweiten Argument. Wir geben nachfolgend eine kompakte Übersicht der verwendeten Notationen und Bezeichnungen.

Ω	offenes, durch Lipschitz-Rand beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$
Γ	Rand des Gebietes Ω
$L^2(\Omega)$	Menge der über Ω quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen
$H^k(\Omega)$	Standard-Sobolev-Räume, $k = 1, 2, \dots$
$H^{\pm 1/2}(\Gamma)$.	fraktionale Sobolev-Räume auf Γ
$H_\Delta^1(\Omega)$	Sobolev-Raum mit $\Delta u \in L^2(\Omega)$
$(\cdot, \cdot)_\Omega$	Skalarprodukt von $L^2(\Omega)$
$\ \cdot\ _\Omega$	$L^2(\Omega)$ -Norm
$\ \cdot\ _k$	$H^k(\Omega)$ -Norm, $k = 1, 2, \dots$
$\ \cdot\ _{1,\delta}$	gewichtete $H^1(\Omega)$ -Norm; $\ u\ _{1,\delta}^2 := \delta^2 \ u\ _\Omega^2 + \ \nabla u\ _\Omega^2$, $\delta > 0$
$\ \cdot\ _{\pm 1/2}$	$H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ -Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$	Dualitätsprodukt zwischen $H^{-1/2}(\Gamma)$ und $H^{1/2}(\Gamma)$

1.1 Integraloperatoren

Innerhalb dieses Abschnitts tragen wir die wesentlichen Eigenschaften der Randintegraloperatoren, die im Zusammenhang mit dieser Arbeit von Bedeutung sind, knapp zusammen. Um diesen Abschnitt kurz und übersichtlich zu halten, verzichten wir auf die Beweise der Aussagen. Diese können zum Beispiel in [26, 75, 80] nachgeschlagen werden. Diese Referenzen eignen sich ebenfalls für eine weiterführende oder tiefergehende Einführung in dieses Gebiet.

Wir betrachten beispielhaft, unter Verwendung der soeben im einleitenden Abschnitt eingeführten Notationen, für $u \in H^1(\Omega)$ die Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + s^2 u(x) &= 0 \quad x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$, vorausgesetzt sei. Diese Form der reduzierten Wellengleichung ergibt sich, wenn die Wellengleichung unter Einbeziehung der gestellten Nullanfangsbedingungen der Laplace-Transformation unterzogen wird. Die mit dem Modellproblem (1.1) verbundene Fundamentallösung $K(\|x - y\|, s)$ ist mit $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, durch

$$K(\|x - y\|, s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0(s\|x - y\|), & d = 2 \\ \frac{e^{-s\|x - y\|}}{4\pi\|x - y\|}, & d = 3 \end{cases} \tag{1.2}$$

gegeben; siehe [75]. In (1.2) ist $K_0(s)$ die Macdonald Funktion der Ordnung null; siehe [61]. Beschreibt δ die Dirac-Delta-Funktion, so ist (1.2) als Fundamentallösung von (1.1) bei festem x und s die distributionelle Lösung von

$$-\Delta_y K(\|x - y\|, s) - s^2 K(\|x - y\|, s) = \delta(x - y) \quad (1.3)$$

für $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$.

Mit Hilfe der Fundamentallösung lassen sich für $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ das Einfachschichtpotential $\mathcal{S}(s)\varphi$ gemäß

$$(\mathcal{S}(s)\varphi)(x) := \int_{\Gamma} K(\|x - y\|, s) \varphi(y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad (1.4)$$

und für $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ das Doppelschichtpotential $\mathcal{D}(s)\psi$ gemäß

$$(\mathcal{D}(s)\psi)(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial K(\|x - y\|, s)}{\partial \nu_y} \psi(y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad (1.5)$$

definieren. Bei der Definition des Doppelschichtpotentials erfolgt die Ableitung in Normalenrichtung, die durch den Einheitsnormalenvektor ν angezeigt wird. Die Richtung des Einheitsnormalenvektors ist dabei stets so gewählt, dass sie in das unbeschränkte Gebiet weist.

Lemma 1.1. *Mit Dichten $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ stellt die Funktion $u(x)$ mit $u(x) = (\mathcal{S}(s)\varphi)(x)$ beziehungsweise $u(x) = (\mathcal{D}(s)\psi)(x)$ eine Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung*

$$-\Delta u(x) + s^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad (1.6)$$

dar.

Beweis. Die Aussage folgt aus (1.3). Details können [80, Proposition 3.1.7] beziehungsweise [80, Korollar 3.1.17] entnommen werden. $\square$

Das Lemma 1.1 zeigt, dass wir für die Lösung des Problems (1.6) den Ansatz $u = \mathcal{S}(s)\varphi$ beziehungsweise $u = \mathcal{D}(s)\psi$ machen können. Dieser Ansatz erfüllt für jede Belegung der Dichten die Gleichung (1.6). Beide Ansätze, Einfachschicht- und Doppelschichtpotentialansatz, führen das Problem, die Lösung $u(x)$ von (1.1) zu finden, auf die Suche nach derjenigen Dichte zurück, für die zusätzlich die Randbeschränkung des entsprechenden Potentials der Randbedingung genügt. Diese Herangehensweise an die Lösung des Problems (1.1) wird als indirekte Methode bezeichnet.

Dem gegenüber steht die direkte Methode, die auf eine auf der Green-Formel beruhenden Darstellungsformel der Lösung zurückgreift. Bevor wir in Lemma 1.4 die Details angeben, ist es notwendig, Beschränkungen von Funktionen $u \in H^1(\Omega)$ auf den Rand Γ vornehmen

zu können. Eine sinnvolle Definition solcher Spuren ist für hinreichend glatte Oberflächen möglich. Wir führen die einseitigen Spurooperatoren

$$\gamma_0^\pm : H^1(\Omega^\pm) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma_0^\pm v = v|_\Gamma \quad \forall v \in C^0(\overline{\Omega^\pm}) \quad (1.7)$$

und die einseitigen Normalenableitungen

$$\gamma_1^\pm : H^2(\Omega^\pm) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma_1^\pm v = \nu \cdot \gamma_0^\pm \nabla v \quad \forall v \in H^2(\Omega^\pm) \quad (1.8)$$

ein. Der Definitionsbereich der Normalenableitung lässt sich auf den Raum $H_\Delta^1(\Omega)$ erweitern.

Das Lemma 1.2 beschäftigt sich mit den Eigenschaften des Spurooperators aus (1.7).

Lemma 1.2. *Es seien Ω^- ein Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ und $\Omega^+ := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}$. Dann sind die Spurooperatoren $\gamma_0^\pm : H^1(\Omega^\pm) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ stetige Operatoren.*

Beweis. Der Nachweis wird in [80, Satz 2.6.8] erbracht. □

Lemma 1.3. *Es seien Ω^- ein Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ und $\Omega^+ := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}$. Dann sind die Normalenableitungen $\gamma_1^\pm : H_\Delta^1(\Omega^\pm) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ stetige Operatoren.*

Beweis. Der Nachweis wird in [80, Satz 2.7.7] erbracht. □

Die Differenz aus innerer und äußerer Spur beziehungsweise innerer und äußerer Normalenableitung einer Funktion bezeichnen wir als Sprung respektive Normalensprung der Funktion am Rand Γ . Zur Abkürzung dieser Sprünge verwenden wir die Bezeichnungen

$$[\gamma_0 u] := \gamma_0^- u - \gamma_0^+ u$$

und analog

$$[\gamma_1 u] := \gamma_1^- u - \gamma_1^+ u.$$

Damit sind wir in der Lage, das folgende Lemma zu formulieren.

Lemma 1.4. *Jede Lösung $u(x) \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ der homogenen partiellen Differentialgleichung*

$$-\Delta u(x) + s^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma,$$

besitzt eine Darstellung der Form

$$u(x) = (\mathcal{S}[\gamma_1 u])(x) - (\mathcal{D}[\gamma_0 u])(x).$$

Beweis. Diese Aussage wird in [80, Satz 3.1.11] gezeigt. □

Die bereits an den Stellen (1.4) und (1.5) eingeführten Potentiale besitzen am Rand Γ ihren charakteristische Sprungeigenschaften. Diese Eigenschaften listet das nächste Lemma auf.

Lemma 1.5. *Die in (1.4) und (1.5) erklärten Potentiale erfüllen für alle $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ die Sprungrelationen*

$$\begin{aligned} [\gamma_0 \mathcal{S}\varphi] &= 0 \quad \text{und} \quad [\gamma_0 \mathcal{D}\psi] = -\psi \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma) \\ &\text{sowie} \\ [\gamma_1 \mathcal{S}\varphi] &= \varphi \quad \text{und} \quad [\gamma_1 \mathcal{D}\psi] = 0 \quad \text{in } H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Beweis. Der Nachweis wird in [80, Satz 3.3.1] erbracht. $\square$

Im Lemma 1.5 nutzen wir formal einseitige Spuren des Einfachschicht- und Doppelschichtpotentials, die mit $w \in L^\infty(\Gamma)$ sowie den durch

$$(\mathcal{V}(s)w)(x) := \int_{\Gamma} K(\|x - y\|, s) w(y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma, \quad (1.9)$$

und

$$(\mathcal{K}(s)w)(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} K(\|x - y\|, s) w(y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma, \quad (1.10)$$

erklärten Randintegraloperatoren die Beziehungen

$$(\gamma_0^\pm \mathcal{S}(s)w)(x) = (\mathcal{V}(s)w)(x), \quad x \in \Gamma,$$

und

$$(\gamma_0^\pm \mathcal{D}(s)w)(x) = \left(\pm \frac{1}{2} w + \mathcal{K}(s)w \right)(x), \quad x \in \Gamma,$$

erfüllen.

Lemma 1.6. *Der zum Einfachschichtpotential (1.4) gehörende Randintegraloperator $\mathcal{V}(s)$ mit*

$$\mathcal{V}(s) : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

ist linear und beschränkt.

Der zum Doppelschichtpotential (1.5) gehörende Randintegraloperator $\mathcal{K}(s)$ mit

$$\mathcal{K}(s) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

ist linear und beschränkt.

Beweis. Der Nachweis wird in [80, Satz 3.1.16] geführt. $\square$

1.2 Faltungsquadratur

Unter dem Begriff Faltungsquadratur versteht man die Approximation einer zeitlich kontinuierlichen Faltung durch eine diskrete Faltung. Dazu führen wir auf dem Zeitintervall $[0, T]$ ein Gitter mit äquidistanten Stützstellen $t_i = i\Delta t$ ein, wobei $i = 0, 1, \dots, N$ sowie $N\Delta t = T$ und für die Schrittweite $\Delta t > 0$ gilt. Ist das zu berechnende Faltungsintegral durch

$$u(t) = \int_0^t k(t - \tau)g(\tau) \, d\tau, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

gegeben, so wird es durch Anwendung der Faltungsquadratur an der Stelle $t = t_n$ durch eine diskrete Faltung der Form

$$u^{\Delta t}(t_n) = u_n := \sum_{i=0}^n \omega_{n-i}^{\Delta t} g(t_i), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

approximiert.

Die Berechnung wird oft dadurch erschwert, dass in vielen Anwendungsfällen die Kernfunktion $k(t)$ entweder distributionelle Terme enthält oder gar nicht explizit bekannt ist. Deshalb wird angestrebt, das Integral (1.11) lediglich mit Hilfe der Laplace-Transformierten

$$K(s) = (\mathcal{L}k)(s) := \int_0^\infty k(t)e^{-st} \, dt$$

zu berechnen, die eine vergleichsweise einfachere Gestalt hat und von der man überdies häufiger explizite Kenntnis besitzt. Um die Verwendung der Laplace-Transformierten hervorzuheben, verwenden wir die Notation, siehe [71],

$$u(t) = (K(\partial_t)g)(t) := \int_0^t k(t - \tau)g(\tau) \, d\tau, \quad t > 0, \quad (1.12)$$

die auf den britischen Physiker und Mathematiker Oliver Heaviside zurückgeht. Diese Wahl findet ihre Begründung in Eigenschaften der Faltung, mit anderen Worten einerseits in der Tatsache, dass mit $g(0) = 0$ die Beziehung $K(\partial_t)g = \partial_t g(t) = g'(t)$ gilt, wenn speziell $K(s) = s$ angenommen wird, und andererseits in der Gültigkeit der Kompositionsregel

$$K_2 K_1(\partial_t)g = K_2(\partial_t)K_1(\partial_t)g. \quad (1.13)$$

Wir betrachten nachfolgend sektorielle Funktionen, das heißt Funktionen, die außerhalb eines Sektors, der einen spitzen Winkel in Richtung der negativen reellen Achse aufweist, analytisch und dort polynomiell beschränkt sind. Da wir im Verlauf dieser Arbeit immer wieder auf sektorielle und nicht-sektorielle Operatoren zu sprechen kommen, geben wir an dieser Stelle folgende Definition.

Definition 1.7. Eine Funktion $K(s)$ heißt sektoriell, falls es Konstanten $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\beta < \frac{\pi}{2}$ gibt, sodass $K(s)$ innerhalb des Sektors

$$|\arg(s - c)| < \pi - \beta \quad (1.14)$$

analytisch und dort gemäß

$$|K(s)| \leq C |s|^\mu \quad (1.15)$$

beschränkt ist.

Eine Funktion, für die die Schranke (1.15) lediglich in einer Halbebene $\operatorname{Re}(s) > c > 0$ der komplexen Ebene gilt, das heißt in (1.14) mit $\beta = \frac{\pi}{2}$, nennen wir nicht-sektoriell.

Es sei $K(s)$ sektoriell. Dann ist die inverse Laplace-Transformation durch

$$k(t) = (\mathcal{L}^{-1}K)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} K(s) e^{st} ds$$

gegeben, wobei γ vollständig im Sektor (1.14), in dem $K(s)$ analytisch ist, liegt und parallel zu dessen Rand verläuft. Durch diesen Ausdruck ersetzen wir $k(t)$ in (1.11) und erhalten nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$u(t) = K(\partial_t)g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} K(s) y_g(t, s) ds. \quad (1.16)$$

Die Funktion

$$y_g(t, s) := \int_0^t e^{(t-\tau)s} g(\tau) d\tau$$

ist als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} y(t) - s \cdot y(t) = g(t) \quad (1.17)$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 0$ bestimmt.

Um das Integral (1.16) berechnen zu können, wird nun die gewöhnliche Differentialgleichung (1.17) in der Zeit diskretisiert und anschließend zu den diskreten Zeitpunkten t_i , $i = 1, 2, \dots, N$, berechnet. Die Zeitdiskretisierung kann mit Hilfe eines $A(\alpha)$ -stabilen linearen Mehrschrittverfahrens, $\alpha > \beta$ und β aus (1.14), erfolgen. Mit $t_i = i\Delta t$ ist ein System der Form

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^n \gamma_{n-j} y(t_j) = \sum_{j=0}^n \delta_{n-j} (s y(t_j) + g(t_j)), \quad n \geq 0, \quad (1.18)$$

zu lösen. Multipliziert man jede der Gleichungen (1.18) mit ζ^n , $|\zeta| < 1$, und summiert daraufhin die Gleichungen, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Cauchy-Produktes

$$\left(\frac{\rho(\zeta)}{\Delta t} - s \right) y(\zeta) = g(\zeta),$$

wobei wir die formalen Potenzreihen

$$\rho(\zeta) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \zeta^j}{\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j}, \quad y(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} y(t_j) \zeta^j \quad \text{und} \quad g(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} g(t_j) \zeta^j$$

eingeführt. Setzt man die formale Lösung

$$y(\zeta) = \left(\frac{\rho(\zeta)}{\Delta t} - s \right)^{-1} g(\zeta)$$

in (1.16) ein, ergibt sich

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} K(s) \left(\frac{\rho(\zeta)}{\Delta t} - s \right)^{-1} g(\zeta) \, ds = K \left(\frac{\rho(\zeta)}{\Delta t} \right) g(\zeta).$$

Die letzte Gleichheit ist ein Resultat der Cauchy-Integralformel.

Definieren wir schließlich die Faltungsgewichte $\omega_j^{\Delta t}(K)$, $j = 0, 1, \dots$, über

$$K \left(\frac{\rho(\zeta)}{\Delta t} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{\Delta t}(K) \zeta^j, \tag{1.19}$$

so lautet die Faltungsquadratur

$$u_n = (K(\partial_t^{\Delta t})g)(t_n) := \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}^{\Delta t} g(t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Sie stellt das zur kontinuierlichen Faltung (1.12) zeitdiskrete Pendant dar.

Erfolgt die Approximation von (1.17) durch ein lineares Mehrschrittverfahren, so sind die p -Schritt-Verfahren der Rückwärtsdifferenzen (BDF-Verfahren) mit $p = 1, 2, \dots, 6$ bekannte Kandidaten. Diese Verfahren sind $A(\alpha)$ -stabil und besitzen die Konsistenzordnung p . Für diese p -Schrittverfahren ist

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^p \frac{1}{j} (1 - \zeta)^j.$$

Sofern $p \leq 2$ ist, sind diese Verfahren sogar A-stabil, das heißt, in diesen Fällen ist $\alpha = 90^\circ$. Wir zitieren für diesen Fall eine Konvergenzaussage aus [71].

Satz 1.8. *Es sei $K(s)$ sektoriell im Sektor (1.14) und $g \in C^p[0, T]$. Des Weiteren basiere die Faltungsquadratur auf einem $A(\alpha)$ -stabilen, $\alpha > \beta$ mit β aus (1.14), BDF-Verfahren der Ordnung p . Dann existiert ein $\bar{t}$, sodass für alle $0 < \Delta t < \bar{t}$ und $n = 1, \dots, N = T/\Delta t$*

$$|u(t_n) - u_n| \leq C \cdot t_n^{-\mu-1} \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \Delta t^{j+1} |g^{(j)}(0)| + t_n \Delta t^p \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t_n} |g^{(p)}(\tau)| \right\}$$

gilt, wobei die Konstante C nicht von Δt und n abhängt.

Bemerkung. *Durch Hinzunahme weniger Korrekturterme, siehe [71], oder im Falle $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(p-1)}(0) = 0$ kann die volle Konvergenzordnung des zugrunde liegenden BDF-Verfahrens erreicht werden.*

Ist $K(s)$ nicht-sektoriell, das heißt nur in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > c > 0$ analytisch und durch die Schranke (1.15) beschränkt, gilt folgendes Resultat, das in [73] zu finden ist.

Satz 1.9. *Es sei $K(s)$ nicht-sektoriell und die Faltungsquadratur basiere auf einem A -stabilen BDF-Verfahren der Ordnung p . Des Weiteren mögen die Ableitungen von g bis zur Ordnung $m-1$, mit $m \geq \max(p+2+\mu, p)$, an der Stelle $t=0$ verschwinden. Dann existiert ein $\bar{t}$, sodass für alle $0 < \Delta t < \bar{t}$ und $n = 0, 1, \dots, N = T/\Delta t$*

$$|u(t_n) - u_n| \leq C \cdot \Delta t^p \int_0^{t_n} |g^{(m)}(\tau)| \, d\tau$$

gilt, wobei die Konstante C nicht von Δt und n abhängt.

Wir betrachten das Einfachschichtpotential (1.4) des Helmholtz-Operators $s^2 \hat{u} - \Delta \hat{u} = 0$ mit $\operatorname{Re} s > 0$. Die Fundamentallösung (1.2) ist die Laplace-Transformation der zeitabhängigen Funktion

$$k(\|x - y\|, t) = \begin{cases} \frac{H(t - \|x - y\|)}{2\pi \sqrt{t^2 - \|x - y\|^2}}, & d = 2 \\ \frac{\delta(t - \|x - y\|)}{4\pi \|x - y\|}, & d = 3, \end{cases} \quad (1.20)$$

wobei $\delta(t)$ die Dirac-Delta-Distribution und $H(t)$ die Heaviside-Funktion darstellen; siehe [35, Seite 622]. Mit der Notation (1.12) ist der Faltungsoperator $\mathcal{S}(\partial_t)$ folglich durch

$$\mathcal{S}(\partial_t)\varphi(x, t) := \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad t > 0, \quad (1.21)$$

gegeben. Dieser Operator wird als retardiertes Einfachschichtpotential bezeichnet. In analoger Weise besitzt das mit dem Doppelschichtpotential (1.5) verbundene retardierte Doppelschichtpotential $\mathcal{D}(\partial_t)$ die Gestalt

$$\mathcal{D}(\partial_t)\psi(x, t) := \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} k(\|x - y\|, t - \tau) \psi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad t > 0. \quad (1.22)$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass $k(\|x - y\|, t)$ die Fundamentallösung der Wellengleichung darstellt und dass sowohl der Einfachschichtpotentialansatz $\mathcal{S}(\partial_t)\varphi(x, t)$ als auch der Doppelschichtpotentialansatz $\mathcal{D}(\partial_t)\psi(x, t)$ die homogene Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ mit homogenen Anfangsbedingungen in $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ für jede Belegung der Dichten lösen.

1.3 Ein rekursiver Algorithmus zur Lösung der diskreten Faltung

In diesem Abschnitt wollen wir eine rekursive Lösungsstrategie vorstellen, mit deren Hilfe ein System der Form

$$g_n = \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}^{\Delta t}(K) u_j, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (1.23)$$

hinsichtlich der unbekannten Größen u_n effizient gelöst werden kann. Wir unterstellen hier, dass der beteiligte Operator $K(s)$ und sein Inverses $K^{-1}(s)$ in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$ der komplexen Ebene analytisch und dort durch (1.15) beschränkt sind. Der Faltungsquadratur liege ein lineares Mehrschrittverfahren zugrunde.

Ein naiver Zugang besteht in der Lösung mittels Vorwärtssubstitution. Demnach lassen sich die Größen $u(t_n)$ durch

$$u_n = (\omega_0^{\Delta t}(K))^{-1} \left(g_n - \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n-j}^{\Delta t}(K) u_j \right), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

ermitteln. Zu jedem Zeitpunkt t_n ist dabei die Lösung einer linearen Gleichung der Art $\tilde{g}_n = \omega_0^{\Delta t}(K) u_n$ zu bestimmen. In diesem Zusammenhang ist der Operator $\omega_0^{\Delta t}$ jeweils derselbe. Die Komplexität ist quadratisch in der Anzahl der Zeitschritte N .

Das Ziel besteht in der Reduzierung der Kosten auf fast lineare Komplexität unter Beibehaltung der Tatsache, dass in jedem Zeitschritt nur ein und derselbe Operator zu invertieren ist.

Aufgrund der Kompositionsregel (1.13) kann die Aufgabe (1.23) auch als Faltung mit dem Operator K^{-1} aufgefasst werden. Es ergeben sich die Größen u_n in diesem Fall zu

$$u_n = \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}^{\Delta t}(K^{-1}) g_j, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (1.24)$$

Dem Vorschlag in [72, 73] folgend, nach dem die gemäß (1.19) definierten Faltungsgewichte $\omega_n^{\Delta t}(K^{-1})$ durch Approximation der Cauchy-Integral-Darstellung unter Zuhilfenahme

der Trapezregel näherungsweise berechnet werden können, erhalten wir zunächst

$$\omega_n^{\Delta t}(K^{-1}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{K^{-1}(\rho(\zeta)/\Delta t)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \approx \frac{\lambda^{-n}}{N+1} \sum_{j=0}^N K^{-1} \left(\frac{\rho(\lambda \zeta_{N+1}^{-j})}{\Delta t} \right) \zeta_{N+1}^{jn}$$

und nach Einsetzen in (1.24) und Umordnung der Terme schließlich

$$u_n \approx \frac{\lambda^{-n}}{N+1} \sum_{j=0}^N K^{-1} \left(\frac{\rho(\lambda \zeta_{N+1}^{-j})}{\Delta t} \right) \left(\sum_{l=0}^N \lambda^j g(t_l) \zeta_{N+1}^{-jl} \right) \zeta_{N+1}^{jn}.$$

Hierbei ist $\zeta_{N+1} = e^{\frac{2\pi i}{N+1}}$. Die Kontur C ist ein Kreis mit Radius $0 < \lambda < 1$ und Mittelpunkt im Ursprung der komplexen Ebene. Diese Lösungsmöglichkeit wurde in [11] eingeführt. Der Ausdruck in der rechten Klammer stellt eine diskrete Fourier-Transformation dar, sodass die Auswertung mit einer Komplexität von $\mathcal{O}(N \log N)$ erfolgen kann. Auch die Berechnung der äußeren Summe kann mit fast linearem Aufwand durchgeführt werden, da es sich um eine inverse diskrete Fourier-Transformation handelt. Die Komplexität ist insgesamt fast linear in der Anzahl der Zeitschritte. Der Approximationsfehler ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^{N+1})$; siehe [11]. In der Praxis kann jedoch nicht jede beliebige Genauigkeit erreicht werden, auch wenn $\lambda \rightarrow 0$ strebt. Der Grund liegt darin, dass die Berechnungen von $K(s)$ und der schnellen Fourier-Transformation nur mit der Maschinengenauigkeit eps erfolgen können. Deswegen kann insgesamt lediglich die Genauigkeit $\lambda^{N+1} + \lambda^{-n} \text{eps}$, $n = 0, 1, \dots, N$, erreicht werden. Die optimale Wahl ist folglich $\lambda = \text{eps}^{1/(2N)}$, die die Fehlerordnung $\sqrt{\text{eps}}$ zur Folge hat.

Ähnlich wie bei der soeben skizzierten Lösungsvariante werden auch bei dem nun vorzustellenden rekursiven Algorithmus die Faltungsgewichte $\omega_n^{\Delta t}(K)$ nicht explizit berechnet. Letzterer hat zudem den Vorteil, dass lediglich $\omega_0^{\Delta t}(K) = K(\rho(0)/\Delta t)$ invertiert werden muss. Diese rekursive Variante wird in [8] vorgestellt und stellt eine Modifikation des Algorithmus in [57] dar. Die Abbildung 1.2 zeigt schematisch den Aufbau der Prozedur.

Wir wollen die unbekannten Größen u_n aus dem System (1.23) bestimmen. Dazu nehmen wir an, dass die Größen u_n für $n = 0, 1, \dots, \tilde{N} < N$ bereits bekannt sind, sodass sich das Problem auf die Lösung von

$$\sum_{j=\tilde{N}+1}^n \omega_{n-j}^{\Delta t}(K) u(t_j) = g_n - \sum_{j=0}^{\tilde{N}} \omega_{n-j}^{\Delta t}(K) u_j, \quad n = \tilde{N} + 1, \tilde{N} + 2, \dots, N,$$

beschränkt. Wenn

$$\tilde{g}_n := \sum_{j=0}^{\tilde{N}} \omega_{n-j}^{\Delta t}(K) u_j$$

der rechten Seite ausgewertet wurde, das entspricht einem der quadratischen Blöcke P_1 , P_2 oder P_3 in Abbildung 1.2, kann die Bestimmung der restlichen Unbekannten, im Schema die verbleibenden Dreiecksblöcke P_0 , auf rekursivem Wege erfolgen.

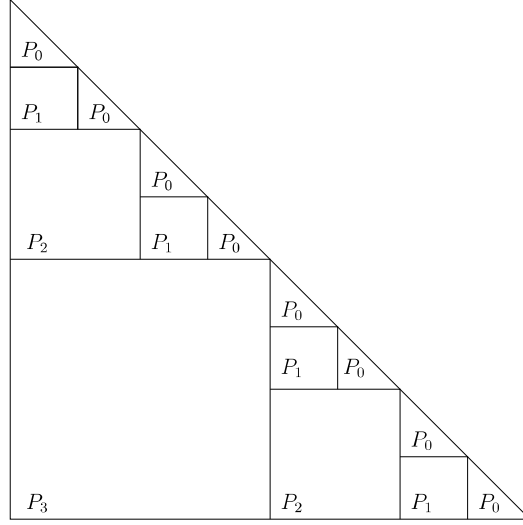


Abbildung 1.2: Schematische Veranschaulichung des rekursiven Ermitteln der Lösung des Systems (1.23)

Um zu zeigen, wie $\tilde{g}_n$ effizient berechnet werden kann, führen wir die Vektoren

$$\omega_{\lambda}^{\Delta t}(K) := (\omega_0^{\Delta t}(K), \lambda \omega_1^{\Delta t}(K), \dots, \lambda^N \omega_N^{\Delta t}(K))^T$$

und

$$\mathbf{u}_{\lambda} := (u(t_0), \lambda u(t_1), \dots, \lambda^{\tilde{N}} u(t_{\tilde{N}}), 0, \dots, 0)^T$$

sowie die zirkulierende Matrix $\mathbf{C}(\omega_{\lambda}^{\Delta t}(K))$, deren erste Spalte mit dem Vektor $\omega_{\lambda}^{\Delta t}(K)$ besetzt ist, und die Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda} := \text{diag}(1, \lambda, \dots, \lambda^N)$ ein.

Dann ist $\tilde{g}_n = (\tilde{\mathbf{g}})_n$ für $n = \tilde{N} + 1, \tilde{N} + 2, \dots, N$, wenn $\tilde{\mathbf{g}}$ über

$$\tilde{\mathbf{g}} := \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{C}(\omega_{\lambda}^{\Delta t}(K)) \mathbf{u}_{\lambda}$$

definiert ist.

Aus $\tilde{g}_n = (\tilde{\mathbf{g}})_n$ leiten wir ab, dass $\tilde{g}_n$ effizient und ohne explizite Kenntnis der Faltungsgewichte berechnet werden kann, wenn das für die Einträge des Vektors $\tilde{\mathbf{g}}$ der Fall ist. Hier nutzen wir aus, dass zirkulierende Matrizen durch die Anwendung der diskreten Fourier-Transformation diagonalisiert werden können. Mit der Bezeichnung $\mathcal{F}_{N+1} \mathbf{u}$ für die diskrete Fourier-Transformation eines Vektors $\mathbf{u}$,

$$(\mathcal{F}_{N+1} \mathbf{u})_l = \sum_{j=0}^N u_j \zeta_{N+1}^{-lj}, \quad \zeta_{N+1} = e^{\frac{2\pi i}{N+1}},$$

gilt deshalb

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathcal{F}_{N+1}^{-1} \text{diag} \left(\mathcal{F}_{N+1} \omega_{\lambda}^{\Delta t} (K) \right) \mathcal{F}_{N+1} \mathbf{u}_{\lambda}. \quad (1.25)$$

Unter Berücksichtigung der Definition der Faltungsgewichte, (1.19), ergibt sich

$$\left(\mathcal{F}_{N+1} \omega_{\lambda}^{\Delta t} (K) \right)_l = \sum_{j=0}^N \lambda^j \omega_j^{\Delta t} (K) \zeta_{N+1}^{-lj} = K \left(\frac{\rho \left(\lambda \zeta_{N+1}^{-l} \right)}{\Delta t} \right) - \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda^j \omega_j^{\Delta t} (K) \zeta_{N+1}^{-lj}$$

und eine Umordnung der Terme innerhalb der letzten Summe führt zu

$$\left(\mathcal{F}_{N+1} \omega_{\lambda}^{\Delta t} (K) \right)_l = K \left(\frac{\rho \left(\lambda \zeta_{N+1}^{-l} \right)}{\Delta t} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k(N+1)} \left(\sum_{j=0}^N \lambda^j \omega_{j+k(N+1)}^{\Delta t} (K) \zeta_{N+1}^{-lj} \right).$$

Da es sich bei der inneren Summe um eine diskrete Fourier-Transformation handelt, erhalten wir nach Anwendung von $\mathcal{F}_{N+1}^{-1}$ auf die vorige Gleichung und gleichzeitiger Einbeziehung von (1.25) schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} = & \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathcal{F}_{N+1}^{-1} \text{diag} \left(K \left(\frac{\rho(\lambda)}{\Delta t} \right), K \left(\frac{\rho(\lambda \zeta_{N+1}^{-1})}{\Delta t} \right), \dots, K \left(\frac{\rho(\lambda \zeta_{N+1}^{-N})}{\Delta t} \right) \right) \mathcal{F}_{N+1} \mathbf{u}_{\lambda} \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k(N+1)} \text{diag} \left(\omega_{k(N+1)}^{\Delta t} (K), \omega_{k(N+1)+1}^{\Delta t} (K), \dots, \omega_{k(N+1)+N}^{\Delta t} (K) \right) \mathcal{F}_{N+1} \mathbf{u}_{\lambda}. \end{aligned}$$

Wird die letzte Summe vernachlässigt, sehen wir, dass der Vektor $\tilde{\mathbf{g}}$ und somit auch $\tilde{g}_n$, $n = \tilde{N} + 1, \dots, N$, lediglich mit Hilfe von Auswertungen des Operators $K(s)$ berechnet werden kann, ohne dass dazu Faltungsgewichte explizit bekannt sein müssen. Der Fehler, der bei dieser Approximation gemacht wird, ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^{N+1})$. Aufgrund der Tatsache, dass $\tilde{\mathbf{g}}$ nur durch Einsatz der diskreten Fourier-Transformation beziehungsweise ihrem inversen Pendant berechnet werden kann, besitzen die Kosten mit $\mathcal{O}(N \log N)$ fast lineare Komplexität.

Dieses Verfahren kann nun rekursiv fortgesetzt werden. Die Gesamtkosten sind dann bei insgesamt $\log N$ Durchläufen von der Ordnung $\mathcal{O}(N \log^2 N)$; siehe [57]. Obwohl die Anzahl der auszuführenden Operationen im Vergleich zur vorherigen nicht-rekursiven Lösungsvariante gestiegen ist, sind die einzelnen Operationen kostengünstiger auszuführen; siehe [8]. Wird diese rekursive Strategie verfolgt, ist darüber hinaus der Operator $\omega_0^{\Delta t} (K) = K(\rho(0)/\Delta t)$ der einzige, den es zu invertieren gilt.

1.4 Integralformulierung der Wellengleichung und numerische Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt wollen wir die Integraldarstellung der Wellengleichung und deren numerische Lösungsstrategien beleuchten. Dazu betrachten wir mit der Notation des

einleitenden Kapitels 1 für $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega^+)$ die homogene Wellengleichung

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 \quad (x, t) \in \Omega^+ \times (0, T) \\ u(x, t) &= g(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= \partial_t u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega^+\end{aligned}\tag{1.26}$$

im Zeitintervall $(0, T)$, $T > 0$. Die vorangegangenen Abschnitte zeigen, dass wir zur Lösung der Wellengleichung (1.26) einen Einfachschichtpotentialansatz der Form

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad x \in \Omega^+, \, t > 0,$$

mit der Fundamentallösung k der Wellengleichung, siehe (1.20), nutzen können. Gleichmaßen besteht die Möglichkeit, den direkten Ansatz zu wählen, nach dem die Lösung mit Hilfe einer Kombination aus Einfach- und Doppelschichtpotential als

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} k(\|x - y\|, t - \tau) \psi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad x \in \Omega^+, \, t > 0,\end{aligned}$$

dargestellt wird.

Beide Ansätze erfüllen sowohl die homogene Wellengleichung als auch die an sie gestellten Anfangsbedingungen. Unter Berücksichtigung der Spuren von Einfach- und Doppelschichtpotential sind wir in der Lage, die unbekannte Dichte φ über die Randbedingung der Wellengleichung, $g(x, t) = u(x, t)$ mit $x \in \Gamma$, zu ermitteln. Diese Herangehensweise führt auf eine Randintegralgleichung für φ . Wir erhalten

$$g(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad x \in \Gamma, \, t > 0,\tag{1.27}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} k(\|x - y\|, t - \tau) g(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau - \frac{1}{2} g(x, t), \quad x \in \Gamma, \, t > 0.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Im letzteren Fall ist eine physikalische Interpretation der Dichte φ möglich. Sie stellt das Neumann-Datum $\frac{\partial}{\partial \nu} u$ der Lösung $u(x, t)$ auf Γ dar.

Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u(x, t)$ werden in [6], siehe auch [73], untersucht. Für deren Formulierung führen wir den Raum $H_0^r(0, T; H^{\pm 1/2}(\Gamma))$, $r \in \mathbb{R}$, ein, der gemäß

$$\begin{aligned}H_0^r(0, T; H^{\pm 1/2}(\Gamma)) &:= \left\{ g : \Gamma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existiert ein } \tilde{g} \in H^r(\mathbb{R}; H^{\pm 1/2}(\Gamma)) \right. \\ &\quad \left. \text{mit } g = \tilde{g}|_{[0, T]} \text{ und } \tilde{g} \equiv 0 \text{ für } t \leq 0 \right\}\end{aligned}\tag{1.29}$$

mit

$$H^r \left(\mathbb{R}; H^{\pm 1/2}(\Gamma) \right) := \left\{ g : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^{2r} \|(\mathcal{F}g)(\cdot, \omega)\|_{H^{\pm 1/2}(\Gamma)}^2 d\omega < \infty \right\}$$

definiert ist, wobei $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation bezüglich der Zeitvariablen beschreibt.

Lemma 1.10. *Es sei $g \in H_0^{r+2}(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$ für $r \in \mathbb{R}$. Dann besitzt (1.27) eine eindeutige Lösung $\varphi \in H_0^r(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$.*

Beweis. Zum Beweis verweisen wir auf [6, Proposition 3] und [73]. □

Die Ansätze (1.27) und (1.28) führen nach geeigneter Diskretisierung in Raum und Zeit zu einem diskreten System. In Bezug auf die Raumdiskretisierung zählen neben den Kollationsverfahren die Galerkin-Verfahren zu den am häufigsten angewandten Methoden. Wir geben im Folgenden einen kurzen Abriss der Grundideen dieser Verfahren.

In Hinblick auf die numerische Behandlung sei der Rand Γ des zu betrachtenden Gebietes während der Berechnung durch die Vereinigung der M Dreiecks-Randelemente T_j ,

$$\Gamma_h = \bigcup_{j=1}^M T_j,$$

approximiert. Die Randfunktion φ in (1.27) und (1.28) approximieren wir mit Hilfe von Formfunktionen χ_j , die auf Γ_h definiert sind, gemäß

$$\varphi_h(x, t) = \sum_{j=1}^M \varphi_j(t) \chi_j(x). \quad (1.30)$$

Dabei sind die Koeffizienten $\varphi_j(t)$ zeitabhängige Funktionen. Wir setzen (1.30) in (1.27) ein und erhalten

$$\int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \left(\sum_{j=1}^M \varphi_j(\tau) \chi_j(y) \right) d\Gamma_y d\tau = g(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0.$$

Nach Umordnung der Terme ergibt sich

$$\sum_{j=1}^M \int_0^t \left(\int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \chi_j(y) d\Gamma_y \right) \varphi_j(\tau) d\tau = g(x, t). \quad (1.31)$$

Wir machten bereits deutlich, dass wir zur Zeitdiskretisierung die Faltungsquadraturmethode, siehe Abschnitt 1.2, nutzen wollen. Dazu führen wir das Zeitgitter $j\Delta t$ mit der

Zeitschrittweite Δt und $j = 0, \dots, N = T/\Delta t > 0$ ein. Die Faltungsquadraturmethode überführt (1.31) mit $g_n = g(x, t_n)$ in

$$\sum_{j=1}^M \sum_{\ell=0}^n \omega_{n-\ell}^{\Delta t}(\mathcal{V}, \chi_j) \varphi_j(t_\ell) = g_n. \quad (1.32)$$

Die Größen $\omega_\ell^{\Delta t}(\mathcal{V}, \chi_j)$ stellen Faltungsquadraturgewichte dar. Sie stammen aus der Diskretisierung des Einfachschichtpotentials. Aufgrund der Approximation (1.32) erhalten wir als Residuum

$$E(x, t_n) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{j=1}^M \omega_{n-\ell}^{\Delta t}(\mathcal{V}, \chi_j) \varphi_j(t_\ell) - g_n(x).$$

Die Grundidee der Kollokationsmethode besteht nun in der Forderung, dass $E(x, t_n)$ für die Menge der Kollokationspunkte x_k^K , $k = 1, \dots, M$, verschwindet. Da die Anzahl der Kollokationspunkte x_k^K und der Koeffizienten φ_j übereinstimmt, ergibt sich das diskretisierte Einfachschichtpotential als quadratische Matrix. Wir erhalten insgesamt

$$\mathbf{V}_0 \boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{g}_n - \sum_{\ell=1}^n \mathbf{V}_\ell \boldsymbol{\varphi}_{n-\ell},$$

wobei die einzelnen Vektoren und Matrizen die folgende Gestalt besitzen:

$$\mathbf{V}_\ell^{(k,j)} := \left(\omega_\ell^{\Delta t}(\mathcal{V}, \chi_j^\varphi) \right) (x_k^K), \quad \mathbf{g}_n^{(j)} := g_n(x_j^K), \quad \boldsymbol{\varphi}_n^{(j)} := \varphi_j(t_n).$$

Die mit dem Kollokationsverfahren verbundene Systemmatrix $\mathbf{V}_0$ ist vollbesetzt und nicht symmetrisch.

Im Gegensatz zum Kollokationsverfahren, bei dem $E(x, t_n)$ an bestimmten Kollokationspunkten verschwindet, wird bei Galerkin-Methoden verlangt, dass das Residuum orthogonal auf gewissen Testfunktion χ_j , $j = 1, \dots, M$, steht. Die Testfunktionen erfüllen daher

$$\left\langle E, \chi_j \right\rangle_\Gamma := \int_\Gamma E(x, t_n) \chi_j(x) \, d\Gamma = 0.$$

Demzufolge ergibt sich zum Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$ das vollständig diskrete System

$$\mathbf{V}_0 \boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{g}_n - \sum_{\ell=1}^n \mathbf{V}_\ell \boldsymbol{\varphi}_{n-\ell},$$

wobei hier

$$\mathbf{V}_\ell^{(k,j)} := \left\langle \chi_k, \omega_\ell^{\Delta t}(\mathcal{V}, \chi_j) \right\rangle_\Gamma, \quad \mathbf{g}_n^{(j)} := \langle \chi_j, g_n \rangle, \quad \boldsymbol{\varphi}_n^{(j)} := \varphi_j(t_n)$$

gilt. Die Wahl der Testfunktionen führt auch in diesem Fall zu einem quadratischen System, deren Systemmatrix wiederum vollbesetzt ist, diesmal jedoch symmetrische Gestalt besitzt.

In dieser Arbeit werden wir auf die Faltungsquadraturmethode zur Zeitdiskretisierung in Verbindung mit der Galerkin-Randelemente-Diskretisierung zurückgreifen. Dennoch existieren daneben weitere Möglichkeiten, die retardierten Randintegrale (1.27) und (1.28) zu diskretisieren. Diese schließen Raum-Zeit-Kollokationsmethoden ein. Dabei wählt man Basisfunktionen der Art

$$\psi_j^i(x, t) = \chi_i(x) \varphi_j(t), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.33)$$

Die Funktionen $\chi_i(x)$ bilden eine Basis eines Finite-Elemente-Unterraums von $H^{-1/2}(\Gamma)$ und die Funktionen $\varphi_j(t)$ sind als Basis auf dem Zeitintervall $[0, T]$ definiert. Die gesuchte Funktion φ wird durch eine Linearkombination der Basis,

$$\varphi_{\Delta t}^h(x, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \psi_j^i(x, t), \quad (1.34)$$

approximiert. Die Bestimmung von φ aus (1.27) wird schließlich auf die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $\alpha_{i,j}$ aus den Gleichungen

$$(\mathcal{V} \varphi_{\Delta t}^h)(x_\ell^K, t_k^K) = g(x_\ell^K, t_k^K)$$

zurückgeführt. Hierbei sind t_k^K , $k = 1, \dots, N$ Zeit- und x_ℓ^K , $\ell = 1, \dots, M$ Raumkollokationspunkte.

Kollokationsmethoden erfahren aufgrund ihrer einfachen Konstruktion vor allem im Ingenieurbereich großen Zuspruch und führten zu vielen weiteren Ansätzen; siehe [17, 76]. Für diese ist jedoch aufgrund geringer theoretischer Untersuchungen nicht nur die Frage nach der Konvergenz, sondern vor allem auch nach der Stabilität oft nur unzureichend beantwortet und lediglich für spezielle Gebiete geklärt; siehe [34]. Die Stabilität hängt entscheidend von der Wahl der Zeit-Basis-Funktionen $\varphi_j(t)$ und der exakten Auswertung der Randintegrale, die als Einträge der Systemmatrix auftreten, ab. Mit dem Ziel, die Stabilität zu erhöhen, wurden Kollokationsverfahren mit geeigneten Stabilisierungstechniken entwickelt; siehe [16, 33, 38].

Zu Kollokationsverfahren stellen Galerkin-Verfahren in Zeit und Ort eine Alternative dar. Bei dieser Variante wird die Bestimmung der unbekannten Dichtefunktion φ aus (1.27) ausgehend von einer Raum-Zeit-Variationsformulierung – mit (1.33) und der Approximation (1.34) – auf die Bestimmung der Koeffizienten $\alpha_{i,j}$ aus

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_{i,j} \int_0^T \int_\Gamma \mathcal{V} \psi_j^i(x, \tau) \psi_\ell^k(x, \tau) d\Gamma_x d\tau = \int_0^T \langle \dot{g}, \psi_\ell^k \rangle_\Gamma d\tau, \quad k = 1, \dots, M, \quad \ell = 1, \dots, N$$

zurückgeführt.

Durch mathematische Analysen konnten die Stabilität und die Konvergenz von Galerkin-Approximationen in Raum und Zeit der Randintegrale (1.27) und (1.28) zunächst für glatte, abgeschlossene Ränder auf ein theoretisches Fundament gestellt werden; siehe [6,

51]. Die Stabilität steht auch hier in engem Zusammenhang mit der genauen Auswertung der auftretenden Integrale. Im Bereich der Akustik fanden diese Ideen in der Behandlung von Streuproblemen in besonderem Maße Anwendung; siehe [37, 42, 50, 52].

Ein aktueller Forschungsgegenstand beschäftigt sich damit, die Auswertung der Einträge der aus der Galerkin-Diskretisierung resultierenden Systemmatrix zu vereinfachen. Das wird in [81] durch die Wahl einer speziellen Zeit-Basis, bestehend aus glatten Basisfunktionen mit kompaktem Träger, erreicht; siehe auch [82].

Die Diskretisierung der Randintegrale (1.27) und (1.28) mit Hilfe von Kollokations- oder Galerkin-Verfahren in Raum und Zeit führt auf ein System, dessen Lösung mit Gesamtkosten der Ordnung $\mathcal{O}(M^2N)$ verbunden ist. Schnelle Lösungsstrategien werden entwickelt mit dem Ziel, diese Kosten zu senken. Wir weisen an dieser Stelle auf den Plane-Wave-Time-Domain-Algorithmus hin, durch den mit Hilfe einer geeigneten Entwicklung des gesuchten Feldes in ebene Wellen eine Reduktion der Gesamtkosten auf $\mathcal{O}(MN \log^2 M)$ erreicht wird; siehe [40, 41].

1.5 FEM-BEM-Kopplung nach Johnson und Nédélec

Dieser Abschnitt ist der Kopplung von Finiter-Elemente- und Randelementmethode nach Johnson und Nédélec gewidmet. Als Anwendungsfall, der im Bereich der zeitharmonischen Akustik eine große Rolle spielt, soll ein Transmissionsproblem der Helmholtz-Gleichung dienen.

Dazu betrachten wir für $u \in H^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$ die Helmholtz-Gleichung (1.1) in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,

$$-\Delta u + s^2 u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \quad (1.35)$$

wobei $\operatorname{Re} s > 0$ positiv ist.

Es sei nun der Träger von f in einem beschränkten Gebiet Ω^- mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega^- = \Gamma$ vollständig enthalten. Dann lässt sich das Ausgangsproblem (1.35) in ein Außenraumproblem

$$-\Delta u^e + s^2 u^e = 0 \quad \text{in } \Omega^+ \quad (1.36)$$

und ein Innenraumproblem

$$-\Delta u^i + s^2 u^i = f \quad \text{in } \Omega^- \quad (1.37)$$

teilen. Auf dem Rand Γ stellen wir die Transmissionsbedingungen

$$\gamma_0^- u^i = \gamma_0^+ u^e \quad \text{und} \quad \gamma_1^- u^i = \gamma_1^+ u^e, \quad (1.38)$$

die die beiden separaten Teilprobleme koppelt. Die Lösung u des Ausgangsproblems (1.35) kann mit der Lösung der Teilprobleme (1.36) und (1.37) sowie den Transmissionsbedingungen (1.38) auf dem Rand gemäß

$$u = \begin{cases} u^e & \text{in } \Omega^+ \\ u^i & \text{in } \Omega^- \end{cases}$$

identifiziert werden. Die Lösung des Transmissionsproblems (1.36), (1.37) und (1.38) ist für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} s > 0$, eindeutig bestimmt; siehe [31].

Die Grundidee der FEM-BEM-Kopplungsverfahren besteht darin, das Transmissionsproblem mit Hilfe zusätzlicher nicht-lokaler Randbedingungen auf ein Randwertproblem für das Innengebiet Ω^- zu reduzieren. Die angesprochenen Randbedingung erhält man durch Reduktion des Außenraumproblems (1.36) auf eine Integralgleichung auf dem Rand. Das Randwertproblem in Ω^- , das wir auf diese Weise erhalten, kann mit der Finite-Elemente-Methode gelöst werden. Das bestimmt die Lösung im Innengebiet und die Cauchy-Daten auf dem Rand. Die Lösung im Außengebiet kann mit Hilfe geeigneter Darstellungsformeln erhalten werden.

Der Vorgang der Reduktion des Außenraumproblems auf Randintegralgleichungen ist kein eindeutiger Prozess und somit ergeben sich auch verschiedene Kopplungsverfahren. Die Kopplungsstrategie von Johnson und Nédélec macht von der direkten Methode, das heißt von der Darstellung der Lösung u in Ω^+ mit Hilfe der Green-Formel, Gebrauch. Es ergibt sich

$$u^e(x) = \int_{\Gamma} \gamma_0^+ u^e(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} K(\|x - y\|, s) \, ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_1^+ u^e(y) K(\|x - y\|, s) \, ds_y \quad \forall x \in \Omega^+.$$

Durch Einbeziehen der Sprungeigenschaften des Einfach- und Doppelschichtpotentials aus Lemma 1.5 gelangen wir mit $\mathcal{V}(s)$ aus (1.9) und $\mathcal{K}(s)$ aus (1.10) zu folgender Randintegralgleichung

$$\gamma_0^+ u^e = \left(\frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{K} \right) \gamma_0^+ u^e - \mathcal{V} \lambda \quad \text{auf } \Gamma, \quad (1.39)$$

die eine Beziehung zwischen $\gamma_0^+ u^e$ und $\lambda := \gamma_1^+ u^e$ herstellt. Unter Berücksichtigung der Transmissionsbedingungen geht (1.39) in die Gleichung

$$\left(\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \gamma_0^- u^i + \mathcal{V} \lambda = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

über, die wir anschließend an das Innenraumproblem (1.37) koppeln können. Wir gelangen schließlich zu folgendem Randwertproblem.

Bestimme $u^i \in H^1(\Omega^-)$ und $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} -\Delta u^i + s^2 u^i &= f \quad \text{in } \Omega^- \\ \frac{\partial u^i}{\partial \nu} &= \lambda \quad \text{auf } \Gamma \\ \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right) \gamma_0^- u^i + \mathcal{V}\lambda &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1.40}$$

gilt.

Die zu (1.40) gehörende schwache Formulierung lautet:

Finde $u^i \in H^1(\Omega^-)$ und $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} a(u^i, v) - \langle \lambda, \gamma_0^- v \rangle_\Gamma &= (f, v)_{\Omega^-} \quad \forall v \in H^1(\Omega^-) \\ \left\langle w, \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right) \gamma_0^- u^i \right\rangle_\Gamma + \langle w, \mathcal{V}\lambda \rangle_\Gamma &= 0 \quad \forall w \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Dabei bezeichnet $a(u, v)$ die durch

$$a(u, v) = \int_{\Omega^-} \nabla u \nabla v + s^2 uv \, dx$$

definierte Bilinearform.

Mit dem Operator $A : H^1(\Omega^-) \rightarrow (H^1(\Omega^-))'$, $(Au)(v) := a(u, v)$ und dem Funktional $\ell : H^1(\Omega^-) \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell(v) := (f, v)$ können wir (1.41) folgendermaßen in Operatorform schreiben

$$\begin{pmatrix} A & -\gamma_0^t \\ \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right) \gamma_0 & \mathcal{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass diese gekoppelte Finite-Elemente-Randelemente-Formulierung auf ein nicht-symmetrisches Problem führt.

Die erste theoretische Behandlung dieser auf ein unsymmetrisches System führenden Kopplungsstrategie geht auf die Arbeit [60] von Johnson und Nédélec zurück, die sich mit dem Laplace-Problem auseinandersetzt. Der Nachweis der Stabilität dieser Methode ist dabei eng an die Kompaktheit des entsprechenden Doppelschichtpotentials geknüpft. Diese Eigenschaft setzt das Vorhandensein eines genügend glatten, etwa eines Ljapunov-regulären Randes voraus. Bei Rändern vom Lipschitz-Typ geht die Kompaktheit jedoch verloren. Heute weiß man, dass die Stabilität des Verfahrens auch im Fall von Lipschitz-Rändern gewährleistet ist. In [83], siehe auch [89], wird der Nachweis für das Modellproblem der Yukawa-Gleichung ohne Berufung auf Kompaktheitsargumente erbracht und das Ergebnis auf die Laplace-Gleichung übertragen. Diese Erkenntnisse wurden in [44] genutzt um die Stabilität des sogenannten quasisymmetrischen Kopplungsverfahrens von Bielak und MacCamy, siehe [15], ebenfalls auf Lipschitz-Ränder zu erweitern.

Effiziente Berechnung von Randintegralgleichungen im Zeitbereich für gedämpfte und ungedämpfte Wellen

Lineare partielle Differentialgleichungen hyperbolischen Typs, die bei der mathematischen Beschreibung einer Vielzahl physikalischer Phänomene auftreten, wie der Ausbreitung oder der Streuung akustischer Wellen in einem räumlich unbegrenzten Gebiet, können als Randintegralgleichungen im Zeitbereich umformuliert werden und erlauben so eine bessere numerische Behandlung. In diesem Abschnitt stellen wir eine Möglichkeit zur effizienten Berechnung numerisch diskretisierter Gleichungen dieser Art vor. Wir werden einen Algorithmus angeben, mit dessen Hilfe die Wellengleichung gelöst werden kann. Besonderes Augenmerk legen wir dabei darauf, wie bei Langzeitberechnungen eine Einsparung des Speicherbedarfs erreicht wird, wenn das Huygens-Prinzip nicht gilt.

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Schilderung des zu behandelnden Problems, zeigen, wie mit Hilfe der Methode der Faltungsquadratur die Semidiskretisierung in der Zeit vorgenommen wird und motivieren daraus die folgenden Abschnitte. Anschließend werden wir herausarbeiten, ob und wie im Fall nicht-sektorieller Operatoren, siehe Definition 1.7, eine Approximation der Faltungsgewichte möglich ist. Im darauf folgenden Abschnitt erläutern wir die algorithmische Idee zur effizienten Umsetzung der vorangegangenen Erkenntnisse. Anhand eines numerischen Beispiels der gedämpften Wellengleichung werden im abschließenden Kapitel die theoretischen Erkenntnisse praktisch illustriert.

2.1 Problembeschreibung

Um die an einem akustisch weichen Hindernis gestreute Welle zu bestimmen, ist ein äußeres Dirichlet-Problem für die Wellengleichung mit verschwindenden Anfangsbedingungen zu lösen. Wir betrachten im Folgenden ein solches Szenario. Dazu sei Ω ein beschränktes Teilgebiet des $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) und $\Omega^+ := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ dessen Komplement. Den gemeinsamen Lipschitz-Rand bezeichnen wir mit Γ . Wir suchen diejenige Funktion $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$, die der nachstehenden, gegebenenfalls gedämpften, Wellengleichung mit der hier zugunsten der einfacheren Darstellung des Sachverhaltes als konstant angenommenen Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ und dem Dämpfungsfaktor $\alpha \geq 0$ genügt.

$$\partial_t^2 u(x, t) + \alpha \partial_t u(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega^+ \times (0, T), \quad (2.1a)$$

$$\text{mit Anfangsbedingungen} \quad u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad (2.1b)$$

$$\text{und Dirichlet-Randbedingung} \quad u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T). \quad (2.1c)$$

Dabei beobachten wir die Welle innerhalb des Zeitintervalls $(0, T)$ mit $T > 0$. Es ist bekannt, dass die entsprechende Lösung $u(x, t)$ existiert und dass diese für hinreichend glatte Funktionen $g(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit der Eigenschaft $g(x, t) = 0$, falls $t \leq 0$, eindeutig ist; siehe [6, 73].

Da im zweidimensionalen Raum das Huygens-Prinzip unabhängig vom Vorhandensein eines Dämpfungseffektes nicht gilt, setzen wir in diesem und den folgenden Abschnitten dieses Kapitels $\alpha = 0$ im Falle der zweidimensionalen Wellengleichung. Wenn umgekehrt der dreidimensionale Raum zugrunde liegt, setzen wir $\alpha > 0$, sodass folglich auch hier die Gültigkeit des Huygens-Prinzips verletzt ist.

Wir führen das Ausgangsproblem (2.1) auf eine Randintegralgleichung zurück. Dazu wählen wir den Einfachschichtpotentialansatz und erhalten

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad (x, t) \in \Omega^+ \times (0, T),$$

in Bezug auf die Darstellung der Lösung $u(x, t)$. Die Dichte $\varphi(\cdot, t) \in H^{-1/2}(\Gamma)$ stellt die gesuchte Größe dar, wohingegen $k(r, t)$ die Fundamentallösung der Wellengleichung (2.1a) beschreibt. Sie besitzt folgende Gestalt

$$k(r, t) = \begin{cases} \frac{H(t - \frac{r}{c})}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}}, & d = 2 \\ \frac{e^{-\alpha t/2}}{4\pi r} \left(\delta(t - \frac{r}{c}) + \frac{\alpha r}{2\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} I_1 \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}} \right) H(t - \frac{r}{c}) \right), & d = 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

In diesem Zusammenhang ist $\delta(t)$ die Dirac-Delta-Distribution, $H(t)$ die Heaviside-Funktion und $I_1(t)$ die modifizierte Bessel-Funktion erster Ordnung; siehe [30].

Jede Dichtefunktion φ erfüllt die Gleichung (2.1a) mit der Anfangsbedingung (2.1b). Demzufolge erhalten wir φ durch Einsetzen der Randbedingung (2.1c) und anschließender Lösung der so erhaltenen Randintegralgleichung

$$g(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T). \quad (2.3)$$

Wir wenden uns der Zeitdiskretisierung zu. Dazu betrachten wir ein Gitter bestehend aus äquidistanten Stützstellen $t_j = j\Delta t$, wobei $j = 0, 1, \dots, N$ ist und für die Zeitschrittweite $\Delta t = T/N > 0$ gilt. Im Zuge der Zeitdiskretisierung kommt die im Abschnitt 1.2 eingeführte Faltungsquadraturmethode zum Einsatz. Diese Diskretisierungsmethode verwendet an Stelle der in (2.2) gegebenen Funktion $k(r, t)$ deren Laplace-Transformation $K(r, s) := \mathcal{L}k(r, t)$, die hier durch

$$K(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{sr}{c}\right) & \text{falls } d = 2 \\ \frac{e^{-\frac{r}{c}\sqrt{s^2 + \alpha s}}}{4\pi r} & \text{falls } d = 3, \end{cases} \quad (2.4)$$

gegeben ist. Die auftretende Funktion $K_0(s)$ stellt die Macdonald-Funktion der Ordnung null dar; siehe [61].

An dieser Stelle zeigt sich ein Vorteil der gewählten Diskretisierungsmethode. Die Fundamentallösung im Zeitbereich besitzt vor allem im Fall der ungedämpften Wellengleichung eine komplizierte und unübersichtliche Gestalt, die Distributionen enthält. Nichtsdestotrotz ist ein weitaus komplizierteres Aussehen denkbar, zum Beispiel bei dynamisch viskoelastischen oder dynamisch poroelastischen Problemen, oder die Fundamentallösung ist gar nicht explizit bekannt. Im Gegensatz dazu haben wir es im Laplace-Bereich mit wesentlich einfacheren analytischen Funktionen zu tun.

Bei Anwendung der Faltungsquadraturmethode auf die Randintegralgleichung (2.3) gilt es, die unbekannten Dichten $\varphi_j^{\Delta t}(y) := \varphi^{\Delta t}(y, t_j)$, die das zu (2.3) semidiskrete Pendant lösen, zu bestimmen. Dieses lautet mit $g_n(x) := g(x, t_n)$

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^n \int_{\Gamma} \omega_{n-j}^{\Delta t}(\|x - y\|) \varphi_j^{\Delta t}(y) \, d\Gamma_y, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad x \in \Gamma, \quad (2.5)$$

und die Gewichtsfunktionen $\omega_{n-j}^{\Delta t}(r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ sind implizit über die erzeugende Funktion

$$K(r, \rho(\zeta)/\Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{\Delta t}(r) \zeta^n \quad (2.6)$$

definiert. Die verwendeten Bezeichnungen stimmen mit denen des Abschnitts 1.2 überein.

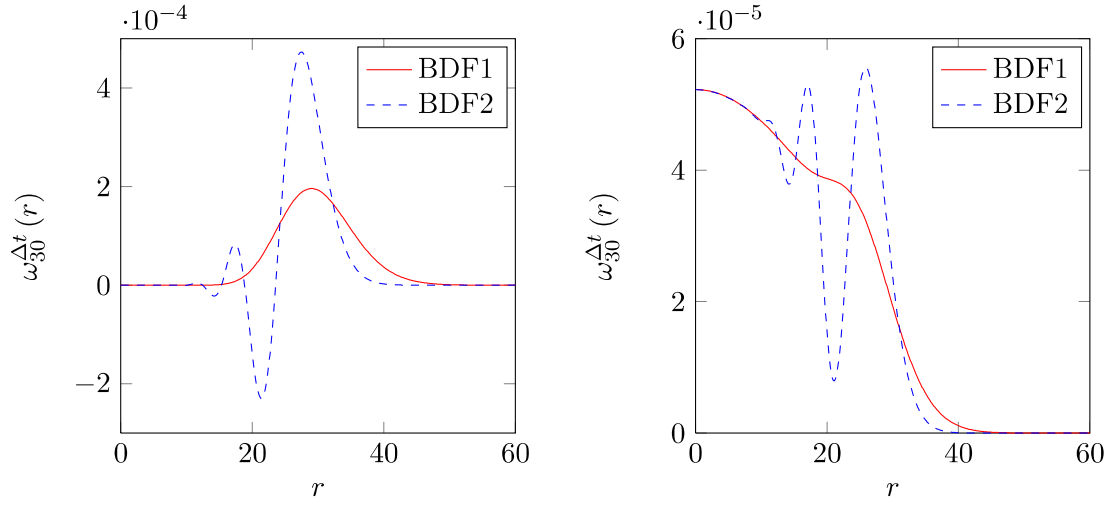


Abbildung 2.1: Darstellung ausgewählter Vertreter der Gewichtsfunktionen für ungedämpfte (links) und gedämpfte (rechts) Wellengleichung bei Verwendung verschiedener Mehrschrittverfahren

Die Abbildung 2.1 zeigt die Kernfunktion $\omega_{30}^{\Delta t}(r)$ für das Beispiel der dreidimensionalen Wellengleichung. Der Faltungsquadratur liegt das Rückwärts-Euler-Verfahren (BDF1-Verfahren) beziehungsweise das BDF2-Verfahren zugrunde. In der linken Abbildung ist jeweils ein Vertreter der Gewichtsfunktionen bezüglich der ungedämpften Wellengleichung und in der rechten Abbildung der gedämpften Wellengleichung zu sehen. Aus beiden Abbildungen wird ersichtlich, dass sich die Graphen der Funktionen für große Argumente r schnell null nähern. Darin zeigt sich die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, nach der sie zu einem Zeitpunkt t_n am Ort $r\Delta t$ noch keine Auswirkungen zeigt, wenn $r > n$.

Im Fall der ungedämpften Wellengleichung sind die Auswertungen der Gewichtsfunktion nahe null, wenn $r\Delta t$ im Vergleich zu t_n genügend klein ist. Das findet Begründung in dem hier vorliegenden Huygens-Prinzip. Die rechte Abbildung verdeutlicht, dass dieses Prinzip bei der gedämpften Wellengleichung nicht gilt. Dennoch wird bereits angedeutet, dass die beiden Graphen der Gewichtsfunktionen im Fall der gedämpften Wellengleichung ähnliches Verhalten aufweisen, wenn auch hier $r\Delta t$ im Vergleich zu t_n genügend klein ist.

In der Arbeit [55] wird bei angewendetem BDF2-Verfahren eine Lösungsstrategie für die Wellengleichung entwickelt, die bei Gültigkeit des Huygens-Prinzips angewendet werden kann. Darin wird vorgeschlagen, die Gewichtsfunktionen außerhalb eines Intervalls der Länge $\mathcal{O}(\sqrt{n}\Delta t)$ durch null zu approximieren, da die Gewichtsfunktionen dort nahezu verschwinden. Auf diese Weise wird eine Einsparung der Speicherkosten und des Zeitaufwandes erreicht. Im folgenden Kapitel zeigen wir, wie auf ähnliche Weise eine Ap-

proximation von Gewichtsfunktionen innerhalb entsprechender Teilintervalle möglich ist, wenn das Huygens-Prinzip versagt.

Wir beschränken uns hier darauf, dass die Faltungsquadratur auf einem A-stabilen Mehrschrittverfahren der Rückwärtsdifferenzen (BDF-Verfahren) fußt.

2.2 Approximation der Fundamentallösung

In diesem Abschnitt beleuchten wir die Funktionen $r \mapsto \omega_n(r)$ näher.

In den Arbeiten [71] und [74] wurde bereits ein Approximationsresultat für den Fall sektorieller Funktionen $K(s)$, siehe Abschnitt 1.2, gezeigt. Wir zitieren den Satz 4.1 aus [71]. Dabei bezeichnen $\omega_n^{\Delta t}$ die durch (1.19) definierten Gewichte.

Satz 2.1. *Es sei $K(s)$ sektoriell im Sinne von Definition 1.7 und $K(s) = \mathcal{L}(k(t))$. Außerdem basiere die Faltungsquadratur auf einem $A(\alpha)$ -stabilen linearen Mehrschrittverfahren der Ordnung p , wobei $\alpha > \beta$ mit dem Parameter β aus (1.14). Dann existiert ein $\bar{t}$, sodass für alle $0 < \Delta t < \bar{t}$ und $n = 1, 2, \dots, N = T/\Delta t$*

$$\left| \omega_n^{\Delta t} - \Delta t \cdot k(n\Delta t) \right| \leq C \Delta t^{p+1} t_n^{-\mu-1-p}$$

gilt, wobei die Konstante C nicht von Δt und n abhängt.

Das bedeutet, dass die implizit definierten Gewichte $\omega_n^{\Delta t}$ die skalierte Fundamentallösung an der Stelle t_n , $\Delta t \cdot k(t_n)$, mit einer Genauigkeit der Ordnung $O(\Delta t^{p+1})$ approximieren, sofern die Laplace-Transformierte von $k(t)$ sektoriell ist.

Wir werden daraus später ein vergleichbares Ergebnis für die in (2.4) eingeführten, nicht-sektoriellen Funktionen $K(r, s)$ ableiten. Dieses Resultat wird für genügend große n gültig sein und wurde bereits in [77] vermutet. Im verbleibenden Teil dieses Kapitels gelte in Bezug auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1$, um die Ausführungen zu vereinfachen.

Bevor wir gezielt die Approximation der Gewichtsfunktionen betrachten, rücken wir die Untersuchung der Gewichte des Verschiebungsoperators e^{-sr} in den Mittelpunkt. Diese Gewichte sind durch die erzeugende Funktion

$$e^{-r \frac{\rho(\zeta)}{\Delta t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\omega}_n^{\Delta t}(r) \zeta^n \quad (2.7)$$

bestimmt und können als Kurvenintegral

$$\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-\frac{r}{\Delta t} \rho(\zeta)}}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

dargestellt werden. Die Kurve C kann als Kreis mit einem Radius kleiner als eins gewählt werden, der seinen Mittelpunkt im Ursprung der komplexen Ebene hat. Im speziellen Fall,

dass das Rückwärts-Euler-Verfahren die Basis der Zeitdiskretisierung bildet, das heißt, wenn $\rho(\zeta) = 1 - \zeta$ gilt, lassen sich die Gewichte aus

$$\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r) = e^{-\frac{r}{\Delta t}} \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{\Delta t} \right)^n$$

berechnen, wohingegen bei Einsatz des BDF2-Verfahrens, hier ist $\rho(\zeta) = \frac{3}{2} - 2\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2$, die Formel

$$\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r) = \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{2\Delta t} \right)^{n/2} e^{-\frac{3}{2}\frac{r}{\Delta t}} H_n \left(\sqrt{\frac{2r}{\Delta t}} \right) \quad (2.8)$$

gilt; siehe [11, 55]. In der letzten Beziehung werden mit $H_n(r)$ die Hermite-Polynome der Ordnung n bezeichnet. Da die Gewichte $\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r)$ in diesem Kapitel eine besondere Rolle spielen, beginnen wir damit, wesentliche Eigenschaften zu zeigen.

Lemma 2.2. *Es seien $\Delta t > 0$, $\varepsilon > 0$, und $k = 1.086435 \dots$ sowie*

$$I_{n,\varepsilon} := \left[0, -t_n W \left(-\frac{1}{e} (\varepsilon k^{1-p})^{p/n} \right) \right],$$

wobei $p = 1, 2$ die Ordnung des zugrunde liegenden BDF-Verfahrens beschreibt. Weiterhin bezeichne W den Hauptast der Lambert-W-Funktion; siehe [27].

Dann gilt

(a) Für alle $n \geq 1$

$$|\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r)| < \varepsilon \quad \forall r \in I_{n,\varepsilon}.$$

(b) Für alle $r > 0$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r)|^p \right)^{1/p} \leq k^{p-1}.$$

Bemerkung. *Im speziellen Fall, dass das BDF2-Verfahren verwendet wird, ist ein zu (a) vergleichbares Resultat in [55] abgeleitet worden.*

Beweis. Um eine Abschätzung für den Betrag der Gewichte zu erhalten, nutzen wir die Schranke $e^{x^2/2} 2^{n/2} \sqrt{n!} k$ für Hermite-Polynome n -ter Ordnung, $H_n(x)$, die in (2.8) auftreten; siehe [3, 22.14.17]. Dabei ist $k = 1.086435 \dots$. Es ergibt sich

$$|\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r)|^p \leq k^{p(p-1)} \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{\Delta t} \right)^n e^{-\frac{r}{\Delta t}}, \quad (2.9)$$

woraus unmittelbar die Aussage (b) folgt.

Als nächstes wenden wir die für $n \geq 1$ gültige Stirling-Formel $n! \geq (n/e)^n \cdot (2\pi n)^{1/2}$ auf (2.9) an und erhalten

$$|\hat{\omega}_n^{\Delta t}(r)| \leq \frac{1}{(2\pi n)^{1/(2p)}} \left(\frac{re}{t_n} \right)^{n/p} e^{-r/(p\Delta t)} k^{p-1} < \left(\frac{re}{t_n} \right)^{n/p} e^{-r/(p\Delta t)} k^{p-1} \leq \varepsilon.$$

Die letzte Abschätzung lässt sich zu

$$\frac{r}{t_n} e^{-r/t_n} \leq \frac{1}{e} (\varepsilon k^{1-p})^{p/n}$$

umformulieren und schließlich unter Zuhilfenahme der Lambert- W -Funktion $W(x)$ nach r auflösen.

$$r \leq -t_n W \left(-\frac{1}{e} (\varepsilon k^{1-p})^{p/n} \right).$$

Damit ist Teil (a) gezeigt. $\square$

Die Lambert- W -Funktion, die in Lemma 2.2 auftaucht, ist eine mehrwertige Funktion. Sie genügt der Beziehung $x = W(x)e^{W(x)}$. Wenn das Argument reell und positiv ist, so besitzt $W(x)$ nur einen Funktionswert. Im offenen Intervall $(-1/e, 0)$ hat die Funktion jedoch zwei reellwertige Äste, von denen der Hauptast Funktionswerte innerhalb des Intervalls $(-1, 0)$ liefert. Eine genauere Beschreibung von Theorie und Anwendung ebenso wie einen historischen Abriss kann man in [27] finden.

Wir zeigen nun, dass die durch (2.6) bestimmten Gewichte $\omega_n^{\Delta t}(r)$ die skalierte inverse Laplace-Transformation $\Delta t \cdot k(r, t)$ der Funktion $K(r, s)$ zu diskreten Zeitpunkten $t_n = n\Delta t$ mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(\Delta t^{p+1})$ approximieren. Nähere Auskunft gibt diesbezüglich der nachfolgende Satz. Zuvor geben wir noch ein Lemma, dessen Aussage für die spätere Beweisführung des Satzes benötigt wird.

Lemma 2.3. *Es sei $K(s)$ für ein $\beta < \pi/2$ analytisch im Sektor $|\arg(s - c)| < \pi - \beta$ und dort gemäß $|K(s)| \leq M|s|^\mu$ beschränkt. Dann existiert eine eindeutige Funktion $k \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$, sodass $K(s) = (\mathcal{L}k)(s) = \int_0^\infty e^{-st} k(t) dt$ und zusätzlich*

$$|k(t)| \leq C \cdot M e^{ct} t^{-\mu-1}$$

für alle $t > 0$ gilt.

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass die Funktion $k(t)$ durch die inverse Laplace-Transformation

$$k(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{(s+c)t} K(s+c) ds$$

mit der Kurve $\Gamma = \Gamma_1^\delta + \Gamma_2^\delta + \Gamma_3^\delta$ erklärt ist, wobei

$$\Gamma_1^\delta = (\infty e^{i(\pi+\beta')}, \delta e^{i(\pi+\beta')}], \Gamma_2^\delta = \{\delta e^{i\varphi} : \varphi \in [-\pi+\beta', \pi-\beta']\}, \Gamma_3^\delta = [\delta e^{-i(\pi+\beta')}, \infty e^{-i(\pi+\beta')})$$

mit $\beta < \beta' < \pi/2$ und $\delta > 0$ gegeben sind.

Wir teilen den Beweis und konzentrieren uns als erstes auf den Fall $\mu > -1$. Wir werden später auf die Gleichheit

$$\int_0^\infty s^\mu e^{-ts} ds = \Gamma(\mu+1) t^{-\mu-1},$$

die für $t > 0$ gilt, zurückgreifen; siehe [45, (3.381)]. Bezüglich der ersten Teilkurve erhalten wir

$$\frac{e^{ct}}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_1^\delta} e^{st} K(s+c) \, ds \right| \leq e^{ct} \frac{MC}{2\pi} \int_\delta^\infty e^{-rt \cos(\beta')} r^\mu \, dr \leq e^{ct} \frac{MC}{2\pi \cos(\beta')^{\mu+1}} \Gamma(\mu+1) t^{-\mu-1}$$

und bezüglich der zweiten

$$\frac{e^{ct}}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_2^\delta} e^{st} K(s+c) \, ds \right| \leq e^{ct} \frac{MC}{2\pi} (\delta^{\mu+1} + \delta c^\mu) \int_{-\pi+\beta'}^{\pi-\beta'} e^{t\delta \cos(\varphi)} \, d\varphi \leq e^{ct} MC (\delta^{\mu+1} + \delta c^\mu) e^{t\delta}.$$

Wir nutzen die Symmetrie der Teilkurven Γ_1^δ und Γ_3^δ aus, um mit gegen null strebendem δ das Erforderliche nachzuweisen.

Wir betrachten nun den Fall $\mu = -1$. Mit derselben Kurve Γ erhalten wir diesmal für die Teilkurve Γ_1^δ

$$\begin{aligned} \frac{e^{ct}}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_1^\delta} e^{st} K(s+c) \, ds \right| &\leq e^{ct} \frac{M}{2\pi} \int_\delta^\infty \frac{e^{-rt \cos(\beta')}}{r} \, dr \\ &\leq e^{ct} \frac{M}{2\pi} \int_{\delta t \cos(\beta')}^\infty \frac{e^{-r}}{r} \, dr = e^{ct} \frac{M}{2\pi} \Gamma(0, \delta t \cos(\beta')), \end{aligned}$$

wobei wir uns im letzten Schritt der unvollständigen Gammafunktion bedienen; siehe [3, 6.5]. Die Behandlung des zweiten Kurvenstücks erfolgt in Analogie zum Fall $\mu > -1$. Wir wählen $\delta = 1/t$ und erkennen, dass $|k(t)|$ durch eine von t unabhängige Konstante beschränkt ist.

Wir beschließen den Beweis mit dem Fall $\mu < -1$. Es gilt $k(0) = \int_\Gamma K(s) \, ds$ und aus der Cauchy-Integral-Formel folgt, dass die Beziehung $k(0) = 0$ erfüllt ist, und folglich $\mathcal{L}(k'(t))(s) = sK(s) - k(0) = sK(s)$ gilt.

Die Aussage des Lemmas sei für $\mu + 1$ richtig. Dann ist sie auch für μ richtig, denn für $|K(s)| \leq M|s|^\mu$ innerhalb des Sektors $|\arg(s-c)| < \pi - \beta$ gilt:

$$|k(t)| = \left| \int_0^t k'(\tau) \, d\tau \right| \leq CM e^{ct} \left| \int_0^t \tau^{-\mu-2} \, d\tau \right| = e^{ct} MC t^{-\mu-1}.$$

□

Satz 2.4. *Es seien $r \in (0, D]$ und $k(r, t)$ die inverse Laplace-Transformation von $K(r, s)$. Außerdem sei $e^{rs} K(r, s)$ analytisch im Sektor $|\arg(s-c)| < \pi - \beta$, wobei $\beta < \pi/2$ und $c > 0$, und erfülle dort die Ungleichung $|e^{rs} K(r, s)| \leq M(r) \cdot |s|^\mu$ für ein $\mu > -p$. Weiterhin bezeichne $\omega_j^{\Delta t}(r)$ die entsprechenden Faltungsgewichte, wobei der Faltungsquadratur*

ein lineares Mehrschrittverfahren der Rückwärtsdifferenzen der Ordnung $p \in \{1, 2\}$ zugrunde liegt. Dann existiert ein $\bar{t}$, sodass für alle $0 < \Delta t < \bar{t}$ und $0 < \varepsilon < C\Delta t^{1+p+\max(0,\mu)}$ sowie

$$J := \min \left\{ j \in \mathbb{N} : -jW \left(-\frac{1}{e}(\varepsilon k^{1-p})^{p/j} \right) > D/\Delta t \right\} \quad (2.10)$$

und beliebigem $\delta > 0$ mit $t_J + \delta < T$ die Ungleichung

$$|\omega_n^{\Delta t}(r) - \Delta t \cdot k(r, n\Delta t)| \leq C(\delta)M(r)\Delta t^{p+1}, \quad t_n \in [t_J + \delta, T], \quad (2.11)$$

gilt. Die Konstante $C(\delta)$ hängt weder von Δt noch von d oder n ab.

Bemerkung. Diese Aussage stellt eine Erweiterung des Satzes 2.1 in [74] auf die hier vorliegende Klasse nicht-sektorieller Funktion $K(r, s)$ dar.

Beweis. Wir werden den Nachweis in zwei Etappen führen. Wir entwickeln als erstes eine Gleichung, die eine Verbindung zwischen den Gewichten $\omega_n^{\Delta t}(r)$ und der Funktion $k(r, n\Delta t)$ herstellt. Als zweites leiten wir die Satzaussage (2.11) ab.

Wir beginnen mit dem ersten Schritt und führen die Funktion

$$\tilde{k}(r, t) := k(r, t + r)$$

ein, die eine Verschiebung von $k(r, t)$ darstellt. Die Transformation von $\tilde{k}(r, t)$ in den Laplace-Bereich liefert $\tilde{K}(r, s) = e^{rs}K(r, s)$. Unter Berufung auf (2.6) und mit

$$\begin{aligned} K\left(r, \frac{\rho(\zeta)}{\Delta t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{\Delta t}(r) \zeta^n, & \tilde{K}\left(r, \frac{\rho(\zeta)}{\Delta t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}_n^{\Delta t}(r) \zeta^n \\ \text{sowie } e^{-\frac{\rho(\zeta)}{\Delta t}r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\omega}_n^{\Delta t}(r) \zeta^n \end{aligned}$$

erhalten wir deshalb

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{\Delta t}(r) \zeta^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\omega}_n^{\Delta t}(r) \zeta^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}_n^{\Delta t}(r) \zeta^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \hat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \tilde{\omega}_j^{\Delta t}(r) \right) \zeta^n.$$

Ein Koeffizientenvergleich führt zu

$$\omega_n^{\Delta t}(r) = \sum_{j=0}^n \hat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \tilde{\omega}_j^{\Delta t}(r).$$

Aufgrund der unterstellten Analytizität und Beschränktheit von $\tilde{K}(r, s) = e^{rs}K(r, s)$ innerhalb des Sektors $|\arg(s - c)| < \pi - \beta$ dürfen wir an dieser Stelle auf die Aussage des Satzes 2.1 zurückgreifen. Das liefert

$$\tilde{\omega}_n^{\Delta t}(r) - \Delta t \cdot \tilde{k}(r, n\Delta t) = t_n^{-\mu-1-p} \cdot \varepsilon_n(r),$$

wobei $|\varepsilon_n(r)| \leq CM(r)\Delta t^{p+1}$ gilt, sodass weiter

$$\begin{aligned}\omega_n^{\Delta t}(r) &= \sum_{j=0}^{n-J-1} \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{\omega}_j^{\Delta t}(r) + \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \left\{ \Delta t \cdot \widetilde{k}(r, j\Delta t) + t_j^{-\mu-1-p} \varepsilon_j(r) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-J-1} \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{\omega}_j^{\Delta t}(r) + \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) t_j^{-\mu-1-p} \varepsilon_j(r) + \Delta t \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{k}(r, j\Delta t).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Die Summe wurde in drei Terme geteilt mit dem Ziel, in der Folge jeden Term einzeln zu betrachten.

Wir rücken zunächst die letzte der Summen aus (2.12) in das Blickfeld und führen eine Abschneidefunktion $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ein, die

$$\chi(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq \frac{\delta}{2} \\ 1 & \text{falls } t \geq \delta \end{cases} \quad \text{und} \quad |\chi(t)| \leq 1$$

mit der Konstanten $\delta > 0$ aus (2.11) erfüllt. Zudem sei $f(r, t)$ durch

$$f(r, t) := \begin{cases} \chi(t) \widetilde{k}(r, t) & \text{falls } t > \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{falls } t \leq \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

gegeben. Demzufolge gilt für alle n mit $t_n - t_J > \delta$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\Delta t \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{k}(r, j\Delta t) &= \Delta t \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{k}(r, j\Delta t) \chi(j\Delta t) \\ &= \Delta t \sum_{j=0}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) f(r, j\Delta t) + \bar{\varepsilon}(r)\end{aligned}$$

mit einem Fehlerterm

$$|\bar{\varepsilon}(r)| = \Delta t \left| \sum_{j=0}^{n-J-1} \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) f(r, j\Delta t) \right| \leq \Delta t \sum_{j=1}^{n-J-1} |\widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{k}(r, j\Delta t)|.$$

Nun ziehen wir zum einen mit Verweis auf (2.10) die Aussage (a) des Lemmas 2.2 heran, die besagt, dass $|\widehat{\omega}_k^{\Delta t}(r)| < \varepsilon$ für $k > J$ und $r \in (0, D]$, zum anderen nutzen wir aus, dass die Voraussetzungen an $\widetilde{K}(r, s)$ zur Folge haben, dass $\widetilde{k}(r, t)$ für positive t durch $C \cdot M(r)e^{ct}t^{-1-\mu}$ beschränkt ist; siehe Lemma 2.3. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned}|\bar{\varepsilon}(r)| &\leq \varepsilon \Delta t \sum_{j=1}^{n-J-1} |\widetilde{k}(r, j\Delta t)| \leq \varepsilon \Delta t \cdot C \cdot M(r)e^{cT} \sum_{j=1}^{n-J-1} \frac{1}{(j\Delta t)^{1+\mu}} \\ &= C \cdot M(r)e^{cT} \varepsilon \sum_{j=1}^{n-J-1} \frac{1}{j(j\Delta t)^\mu} \leq \varepsilon C \cdot M(r)e^{cT} \log(3(n-J)) \begin{cases} \Delta t^{-\mu}, & \mu > 0 \\ T^{-\mu}, & \mu \leq 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist eine Konsequenz der Schranke in [45, (0.131)] für die harmonische Summe.

Die Faltungsgewichte $\widehat{\omega}_j^{\Delta t}(r)$ werden von dem Operator e^{-rs} , siehe (2.7), erzeugt. Da dieser Operator eine Verschiebung um $-r$ im Zeitbereich bewirkt, schließen wir aus [73, Theorem 3.1], dass

$$\Delta t \sum_{j=0}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) f(r, j\Delta t) = \Delta t f(r, n\Delta t - r) + \widehat{\varepsilon}(r, \delta)$$

mit $|\widehat{\varepsilon}(r, \delta)| \leq \widehat{C}(r, \delta) \Delta t^{p+1}$. Die Konstante $\widehat{C}(r, \delta)$ ist durch $C(T) \max_{t \in [0, T]} |\partial_t^m f(r, t)|$ beschränkt, wobei $C(T)$ eine nur von T und $m = p + 2 + \mu$ abhängige Konstante ist. Wir weisen darauf hin, dass

$$|\mathcal{L}(\partial_t^m f(r, \cdot))| = |s^m \mathcal{L}f(r, \cdot)| \leq C(\sigma) |s|^m$$

für alle $\operatorname{Re} s \geq \sigma > 0$. Die letzte Abschätzung gilt, da $f(r, \cdot)$ für nichtnegative t eine Funktion in C^∞ ist und höchstens polynomiell wächst. Folglich können wir das Lemma 2.3 anwenden, um eine Schranke für $\partial_t^m f(r, t)$ zu erhalten:

$$\max_{t \in [0, T]} |\partial_t^m f(r, t)| = \max_{t \in [\delta/2, T]} |\partial_t^m f(r, t)| \leq CM(r) e^{cT} \delta^{-m-1}.$$

Wir betrachten nun die zweite Summe in (2.12). Dazu verwenden wir die Bezeichnung $\widetilde{\varepsilon}(r) = \sup\{|\varepsilon_j(r)| : j = n - J, \dots, n\}$, sodass $\widetilde{\varepsilon}(r) \leq \widetilde{C}M(r) \Delta t^{p+1}$ gilt, und erhalten

$$\left| \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) t_j^{-\mu-1-p} \varepsilon_j(r) \right| \leq |\widetilde{\varepsilon}(r)| \left(\sum_{j=n-J}^n t_j^{-(\mu+1+p)p} \right)^{1/p}.$$

Dabei zogen wir die Aussage im Teil (b) des Lemmas 2.2 heran. Unter Berücksichtigung der Annahmen $n - J > \delta/\Delta t$ und $\mu > -p$ schlussfolgern wir

$$\left| \sum_{j=n-J}^n \widehat{\omega}_{n-j}(r) t_j^{-\mu-1-p} \varepsilon_j(r) \right| \leq C(\delta) M(r) \Delta t^{p+1}.$$

Schließlich schätzen wir die erste Summe aus (2.12) ab. Wir stellen fest, dass als Folge des Theorems 2.1 in [74] und der Tatsache, dass $\widetilde{k}(r, t)$ durch $C \cdot M(r) e^{ct} t^{-1-\mu}$ für positive t beschränkt bleibt, erstens der Betrag der Gewichte $\widetilde{\omega}_n^{\Delta t}(r)$ für positive n durch den Ausdruck $CM(r) \Delta t e^{ct_n} \cdot t_n^{-1-\mu}$ beschränkt ist, und zweitens $\widetilde{\omega}_0^{\Delta t} = K(\rho(0)/\Delta t)$ sofort $|\widetilde{\omega}_0(r)| \leq CM(r) \Delta t^{-\mu}$ nach sich zieht. Daraus und aus Lemma 2.2, das uns hilft, $\widehat{\omega}_n^{\Delta t}(r)$

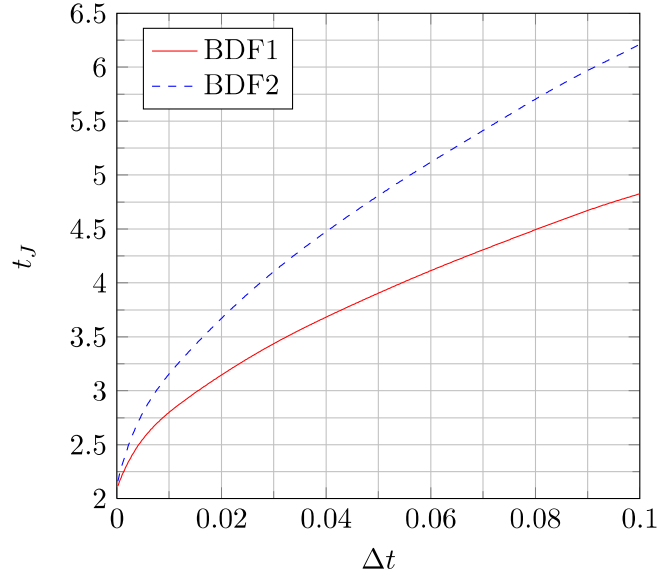


Abbildung 2.2: Entwicklung von t_J , wenn $\Delta t \rightarrow 0$ für festes $T = 25$ und $D = 2$

abzuschätzen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-J-1} |\widehat{\omega}_{n-j}^{\Delta t}(r) \widetilde{\omega}_j^{\Delta t}(r)| &\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{n-J-1} |\widetilde{\omega}_j^{\Delta t}(r)| \\
&\leq \varepsilon \Delta t C M(r) e^{cT} \sum_{j=1}^{n-J-1} (j \Delta t)^{-\mu-1} + \varepsilon C M(r) e^{cT} \Delta t^{-\mu} \\
&\leq \varepsilon C M(r) e^{cT} \left(\sum_{j=1}^{n-J-1} \frac{1}{j} (j \Delta t)^{-\mu} + \Delta t^{-\mu} \right) \\
&\leq \varepsilon C M(r) e^{cT} (\log(3(n-J)) + 1) \begin{cases} \Delta t^{-\mu}, & \mu > 0 \\ T^{-\mu}, & \mu \leq 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Führt man die Teilergebnisse der drei Terme in (2.12) zusammen, folgt die Behauptung (2.11). $\square$

Um zu zeigen, wie sich t_J verändert, wenn die Schrittweite Δt gegen null strebt, halten wir die Zeit bei $T = 25$ und den Durchmesser des Gebietes bei $D = 2$ fest. Die Abbildung 2.2 zeigt die Entwicklung für die Rückwärtsdifferenzenverfahren der Ordnung eins und zwei. In beiden Fällen wird ersichtlich, dass t_J mit fallendem Δt ebenfalls fällt. Das bedeutet, dass die Länge des interessierenden Intervalls, in dem die Approximation (2.11) Gültigkeit besitzt, wächst. Dieses Verhalten ist eng an die Eigenschaften des Hauptzweiges der

Lambert- W -Funktion geknüpft, die monoton gegen -1 strebt, wenn ihr Argument gegen $-1/e$ geht. Das hat zur Folge, dass $t_J \rightarrow D$, falls $\Delta t \rightarrow 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass die Voraussetzungen des Satzes 2.4 von den Kernfunktionen der Wellengleichung in zwei und drei Raumdimensionen, siehe (2.2), und der jeweiligen Laplace-Transformation, siehe (2.4), erfüllt werden.

Lemma 2.5. *Für jedes $\alpha \geq 0$ und $r > 0$ gilt:*

- (a) *Die Funktion $s \mapsto e^{rs} \left(\frac{\partial^m}{\partial r^m} e^{-r\sqrt{s^2+\alpha s}} \right)$ ist in der Schlitzebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ analytisch und es existiert eine Konstante $M_m(c) > 0$, sodass mit $m = 0, 1, \dots$ und $c > 0$ gilt*

$$\left| e^{rs} \left(\frac{\partial^m}{\partial r^m} e^{-r\sqrt{s^2+\alpha s}} \right) \right| \leq M_m(c) \begin{cases} |s|^m, & |s| \geq c \\ |s|^{m/2}, & |s| < c. \end{cases}$$

- (b) *Für jedes $\beta > 0$ existiert eine Konstante $M > 0$, sodass mit $|\arg(s)| < \pi - \beta$ und $|s| > 0$*

$$|e^{rs} K_0(sr)| \leq M \begin{cases} 1 + \log \frac{1}{|sr|}, & |sr| < 1 \\ |sr|^{-1/2}, & |sr| \geq 1 \end{cases}$$

und für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten $M_m > 0$ gilt

$$\left| e^{rs} \frac{\partial^m}{\partial r^m} K_0(sr) \right| \leq M_m |s|^m \begin{cases} |sr|^{-m}, & |sr| < 1 \\ |sr|^{-1/2}, & |sr| \geq 1. \end{cases}$$

Beweis. Die Aussage in Teil (a) des Lemmas bezüglich der Analytizität folgt aus der Ungleichung

$$\operatorname{Re}(s) \leq \operatorname{Re} \left(\sqrt{s^2 + \alpha s} \right),$$

die wir zunächst zeigen.

Wir betrachten die Funktion $f(s) := s - \sqrt{s^2 + \alpha s}$. Die komplexe Ebene sei im Intervall $[-\alpha, 0]$ geschnitten, sodass die Funktion $f(s)$ in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus [-\alpha, 0]$ analytisch und einwertig ist. Daraus folgt, dass der Realteil $\operatorname{Re}(f)$ harmonisch ist. Da $\operatorname{Re}(f) \rightarrow -\alpha/2$, wenn $|s| \rightarrow \infty$, und $\operatorname{Re}(f(s)) \leq 0$ für alle $s \in [-\alpha, 0]$ schließen wir mit Hilfe des Maximumprinzips, siehe [5], dass $\operatorname{Re}(f) \leq 0$.

Die Schranke in Aussage (a) folgt aus der gerade gezeigten Ungleichung mit

$$\left| e^{rs} \left(\frac{\partial^m}{\partial r^m} e^{-r\sqrt{s^2+\alpha s}} \right) \right| = e^{r \operatorname{Re}(s - \sqrt{s^2+\alpha s})} |s^2 + \alpha s|^{m/2}$$

und der Abschätzung

$$|s^2 + \alpha s|^{m/2} \leq |s|^m \left(1 + \frac{\alpha}{|s|} \right)^{m/2} \leq |s|^m \left(1 + \frac{\alpha}{c} \right)^{m/2}$$

im Fall $|s| \geq c > 0$ beziehungsweise

$$|s^2 + \alpha s|^{m/2} \leq (|s|^2 + \alpha|s|)^{m/2} \leq (c + \alpha)^{m/2}|s|^{m/2}$$

im Fall $|s| < c$.

Wir wenden uns nun Teil (b) zu. Gemäß [3] ist die Funktion $K_0(z)$ analytisch in der entlang der negativen Realteilachse geschlitzten komplexen Ebene. Gleiches gilt infolgedessen auch für $e^{rs}K_0(rs)$ als Funktion von s .

Wir führen den Beweis in Bezug auf die Beschränktheit in zwei Teilen. Es gelte zunächst $|rs| < 1$. Unter Berücksichtigung der Potenzreihenentwicklung für $K_0(z)$, $|z| < 1$, die in [3, (9.6.13)] zu finden ist, erhalten wir mit der Euler-Konstanten $\gamma = 0.5772157 \dots$

$$K_0(z) = - \left(\log \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n!^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n!^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

woraus die Schranke in Aussage (b) für $0 < |sr| < 1$ sowie $m = 0$ direkt folgt. Für $m = 1, 2, \dots$ erhalten wir die Abschätzung, nachdem wir die Potenzreihenentwicklung gliedweise differenziert haben.

Aus der asymptotischen Entwicklung [3, (9.7.2)]

$$K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 - \frac{1}{8z} + \frac{(-1)(-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(-1)(-9)(-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\},$$

die für $|z| \rightarrow \infty$ und $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$ gilt, schließen wir

$$|K_0(z)| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |z|^{-1/2} e^{-\operatorname{Re} z} + O(|z|^{-3/2} e^{-\operatorname{Re} z}).$$

Somit ist $|K_0(z)| \leq \text{const} |z|^{-1/2} e^{-\operatorname{Re} z}$ und da $K_0(z)$ in der Schlitzebene analytisch ist, gelten mit der Cauchy-Integralformel dieselben Schranken, eventuell mit verschiedenen Konstanten, auch für die Ableitungen $K_0^{(m)}(z)$. Damit ist der Beweis der Aussage (b) vollständig geführt. $\square$

Lemma 2.6. *Es sei $m = 0, 1, \dots$*

(a) *Mit $\alpha \geq 0$ sei $K(r, s) = e^{-r\sqrt{s^2 + \alpha s}}$. Dann gilt*

$$\left| e^{rs} \frac{\partial^m}{\partial r^m} K(r, s) \right| \leq M(r) \cdot |s|^m$$

innerhalb des Sektors $|\arg(s)| < \pi$ im Falle $m = 0$ und anderenfalls innerhalb des Sektors $|\arg(s - c)| < \pi - \beta$ für jedes $0 < \beta < \pi/2$ und $c > 0$.

(b) Es sei $K(r, s) = K_0(sr)$. Dann gilt

$$\left| e^{rs} \frac{\partial^m}{\partial r^m} K(r, s) \right| \leq M(r) \cdot |s|^{m-1/2}$$

innerhalb des Sektors $|\arg(s - c)| < \pi - \beta$ für jedes $0 < \beta < \pi/2$ mit $c = 0$ im Falle $m = 0$ und $c > 0$ anderenfalls.

Die Konstante $M(r)$ hängt in beiden Aussagen von m und im Fall $m \geq 1$ auch von c und β ab.

Beweis. Aufgrund der Aussage (a) des Lemmas 2.5 ist offensichtlich auch die Aussage (a) dieses Lemmas im Fall $m = 0$ gültig. Unter Berücksichtigung, dass innerhalb des Sektors $|\arg(s - c)| < \pi - \beta$ die Schranke $|s| \geq \sigma = c \sin(\beta)$ gilt, folgt auch die Behauptung für $m \geq 1$.

Wir zeigen als nächstes den zweiten Teil. Der Fall $m = 0$ folgt ebenfalls aus dem Lemma 2.5, diesmal vom Teil (b), und aus der Ungleichung $1 + \log(1/x) < 2x^{-1/2}$, die von allen positiven x erfüllt wird.

Es sei nun $m \in \mathbb{N}$. Der Fall $|sr| \geq 1$ wird aus dem Lemma 2.5 ersichtlich. Wir betrachten deshalb den Fall $|sr| < 1$ und stellen fest, dass innerhalb dieses Bereiches $|s| > r$ gilt, wenn $|s| \geq 1$. Weiterhin gilt im Sektor $|\arg(s - c)| < \pi - \beta$, dass $|s| \geq \sigma = c \sin(\beta)$. Die Aussage (b) folgt dann aus Lemma 2.5 und aus

$$r^{-m} = r^{-m} |s|^{m-1/2} |s|^{-m+1/2} \leq |s|^{m-1/2} \begin{cases} r^{-m} \sigma^{-m+1/2} & \sigma \leq |s| < 1 \\ r^{-2m+1/2} & |s| \geq 1. \end{cases}$$

Die Konstante $M(r)$ kann als Maximum der Werte $r^{-m} \sigma^{-m+1/2}$, $r^{-2m+1/2}$ sowie $r^{-1/2}$ gewählt werden. Damit ist der Beweis erbracht. $\square$

Wir zeigten, dass die Gewichtsfunktionen $\omega_n^{\Delta t}(r)$, die durch die erzeugende Funktion (2.6) des nicht-sektoriellen Operators K definiert sind, für genügend große Indizes n eine geeignete Approximation der skalierten Fundamentallösung im Zeitbereich zum Zeitpunkt t_n darstellen. Außerdem wiesen wir nach, dass das insbesondere auf die Operatoren (2.4) zutrifft. Das folgende Korollar gibt darüber Auskunft, dass im speziellen Fall der Wellengleichung eine ähnliche Approximationseigenschaft auch für die räumlichen Ableitungen der Gewichte Gültigkeit besitzt. Dabei wird dieselbe Konvergenzordnung erreicht.

Korollar 2.7. Für $r \in (0, D]$, $\delta > 0$, $t_n \in (t_J + \delta, T]$, wobei J die im Satz 2.4 definierte Größe ist, gilt mit $\mu = m$ unter den Voraussetzungen des Satzes 2.4 das Folgende:

(a) Für $K(r, s) = \mathcal{L}k = K_0(sr)$

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial r^m} \omega_n^{\Delta t}(r) - \Delta t \cdot \frac{\partial^m}{\partial d^m} k(r, n\Delta t) \right| \leq C(r, \delta) \Delta t^{p+1}.$$

(b) Für $K(r, s) = \mathcal{L}k = e^{-r\sqrt{s^2+\alpha s}}/r$, $\alpha \geq 0$,

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial r^m} [r\omega_n^{\Delta t}(r)] - \Delta t \cdot \frac{\partial^m}{\partial r^m} [dk(r, n\Delta t)] \right| \leq C(r, \delta)\Delta t^{p+1}.$$

Die Konstante $C(r, \delta)$ ist durch $C(\delta)(1+|\log r|)$ im zweidimensionalen Fall und durch die Konstante $C(\delta)$ im dreidimensionalen Fall beschränkt. Im letzteren Fall existiert keine Abhängigkeit von r .

2.3 Algorithmische Aspekte

In diesem Kapitel werden wir die algorithmische Umsetzung ins Blickfeld rücken. Im Abschnitt 2.3.1 werden wir beleuchten, wie wir von den Erkenntnissen des vorhergehenden Abschnitts profitieren können. Dazu werden wir eine Interpolationsstrategie vorstellen, mit deren Hilfe die Kosten in Bezug auf Speicherbedarf und Berechnungsaufwand gesenkt werden können. Daraufhin wenden wir uns im Abschnitt 2.3.2 der algorithmischen Umsetzung zu. Wir werden zeigen, wie die Interpolationsstrategie mit dem rekursiven Algorithmus aus [8], siehe auch Abschnitt 1.3, verbunden werden kann. Im letzten Abschnitt werden wir in Hinblick auf die Reduzierung der Speicherbelastung bei Langzeitberechnungen beschreiben, wie die Idee der Interpolation der Gewichtsfunktionen mit dem auf unseren Sachverhalt angepassten schnellen Faltungsalgorithmus, der von Schädle et al. in [84, 85, 86] entwickelt wurde, verknüpft werden kann.

2.3.1 Interpolation der Gewichtsfunktionen

Wir betrachten das einführende Beispiel (2.1). Im vorangegangenen Abschnitt zeigten wir, dass für einen festen Zeitpunkt t_n , wobei $n > J$ für gewisse $J > D/\Delta t$, die in (2.6) definierten Kernfunktionen $\omega_n^{\Delta t}(r)$ die skalierte Fundamentallösung im Zeitbereich approximieren. Das Korollar 2.7 besagt zudem, dass ein ähnliches Ergebnis mit derselben Konvergenzordnung auch für die räumlichen Ableitungen der Gewichtsfunktionen gilt. Das bedeutet zugleich, dass die räumlichen Ableitungen von $k(r, t_n)$ eine Schranke für die räumlichen Ableitungen der Gewichtsfunktionen $\omega_n^{\Delta t}(r)$ darstellen, wenn wir unterstellen, dass t_n genügend größer als r ist. Da $k(r, t)$ für $t > r$, das heißt, nachdem die Wellenfront vorbeigezogen ist, sehr glatt ist, können wir sowohl $\omega_n^{\Delta t}(r)$ als auch $k(r, t_n)$ unter Verwendung nur weniger Interpolationspunkte aus dem Intervall $r \in [0, D]$ mit hoher Genauigkeit im Ort approximieren, sofern t_n genügend größer als D ist. Diese Idee der Interpolation soll uns nun beschäftigen.

Wir betrachten dazu einen festen Zeitpunkt $t_j \leq T$. Es seien $q+1$ voneinander verschiedene Interpolationspunkte $r_k \in [0, \text{diam}(\Gamma)]$, $k = 0, \dots, q$, zusammen mit den entsprechenden Auswertungen $\kappa_{k,j} = \omega_j^{\Delta t}(r_k)$ gegeben. Wir führen einen Interpolationsoperator $\mathcal{I}_q : C([0, \text{diam}(\Gamma)]) \rightarrow \mathcal{P}_q$ ein, der eine auf dem Intervall $[0, \text{diam}(\Gamma)]$ stetige Funktion

auf ein Polynom vom Grad q abbildet. Dieses Polynom interpoliere $\omega_j(r)$ an den Stellen r_k . Genauer definieren wir

$$(\mathcal{I}_q \omega_j^{\Delta t})(r) := \sum_{k=0}^q \kappa_{k,j} \cdot \ell_k(r), \quad (2.13)$$

wobei $\ell_k(r)$, $k = 0, \dots, q$, die interpolierenden Polynome beschreibt. Bei der numerischen Umsetzung werden wir Lagrange-Polynome verwenden, die durch

$$\ell_j(r) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{r - r_k}{r_j - r_k}$$

gegeben sind.

Wir betrachten nun die diskrete Faltung (2.5) und wenden darauf den Operator (2.13) an. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{\Gamma} \omega_{n-j}^{\Delta t}(\|x - y\|) \varphi_j^{\Delta t}(y) \, d\Gamma_y &\approx \sum_j \int_{\Gamma} (\mathcal{I}_q \omega_{n-j}^{\Delta t})(\|x - y\|) \varphi_j^{\Delta t}(y) \, d\Gamma_y \\ &= \sum_{k=0}^q \int_{\Gamma} \ell_k(\|x - y\|) \left(\sum_j \kappa_{k,n-j} \varphi_j^{\Delta t}(y) \right) \, d\Gamma_y \\ &= \sum_{k=0}^q I_k \left(\sum_j \kappa_{k,n-j} \varphi_j^{\Delta t}(\cdot) \right) (x), \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei

$$I_k \varphi(x) = \int_{\Gamma} \ell_k(\|x - y\|) \varphi(y) \, d\Gamma_y.$$

Der Vorteil dieser Herangehensweise zeigt sich darin, dass wir, anstatt alle Operatoren $W_j : \varphi \mapsto \int_{\Gamma} \omega_j(\|x - y\|) \varphi(y) \, d\Gamma_y$, $j > J$, abspeichern zu müssen, lediglich die dazugehörigen Koeffizienten und weitere $q + 1$ Operatoren benötigen. Da q klein ist, kann auf diese Weise eine signifikante Einsparung der Speicherkosten erreicht werden. Wir bemerken abschließend, dass die innere Summe über j in (2.14) mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation effizient ausgewertet werden kann.

2.3.2 Algorithmische Umsetzung

Wir betrachten das zeitdiskrete Problem (2.5), dem die unbekannten Größen $\varphi_n^{\Delta t}$ mit $n = 0, \dots, N$ genügen müssen. Die dem linearen System zugeordnete Systemmatrix besitzt die Gestalt einer unteren Dreiecks-Toeplitz-Matrix, deren erste Spalte durch den

Vektor aus Faltungsgewichten $(W_0^{\Delta t}, W_1^{\Delta t}, \dots, W_N^{\Delta t})^T$ gegeben ist. In unserem Fall sind die Faltungsgewichte Randintegraloperatoren $W_n^{\Delta t} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ und durch

$$(W_j^{\Delta t} \varphi)(x) = \int_{\Gamma} \omega_j^{\Delta t}(\|x - y\|) \varphi(y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma,$$

definiert.

Zur Lösung des unteren Dreiecks-Toeplitz-Systems werden wir den in [57] eingeführten und in [8] weiter modifizierten rekursiven Algorithmus heranziehen; siehe auch Abschnitt 1.3. Unser Lösungsalgorithmus besitzt dann eine Komplexität von $O(N \log^2 N)$ und verwendet ausschließlich die Kernfunktionen im Laplace-Bereich. Darüber hinaus ist lediglich der Operator $W_0^{\Delta t}$ zu invertieren.

Wir werden nun darlegen, wie der Interpolationsansatz mit dem rekursiven Algorithmus vereinbart werden kann. Das zeitdiskrete System (2.5) sei Ausgangspunkt der Überlegungen. Wir unterstellen, dass die Kernfunktionen $\omega_n^{\Delta t}(r)$ des Integraloperators $W_n^{\Delta t}$ für $n > J$ bei Verwendung weniger Interpolationspolynome ℓ_k , $k = 0, 1, \dots, q$, mit hoher Genauigkeit interpoliert werden können. Da die n -te untere Diagonale der Toeplitz-Matrix durch $W_n^{\Delta t}$ beschrieben wird, befinden sich alle Kerne, die wir durch eine Interpolation ersetzen wollen, unterhalb der J -ten unteren Diagonale. Die Lösung des Systems (2.5) folgt dann den nachfolgend beschriebenen Ideen, die in Abbildung 2.3 grafisch aufbereitet sind.

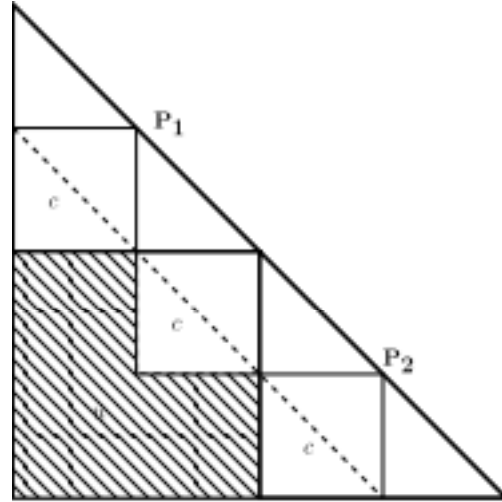


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der rekursiven Lösungsstrategie

Das Problem (2.5) lautet

$$\text{Löse } g_n = \sum_{j=0}^n W_{n-j}^{\Delta t} \varphi_j^{\Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad t_n = n\Delta t.$$

Wir teilen das Problem in zwei Teilprobleme, die wir mit P_1 und P_2 bezeichnen. Diese Teilprobleme sind von der Gestalt

$$\begin{aligned} P_1 : \quad & \text{Löse } \sum_{j=0}^n W_{n-j}^{\Delta t} \varphi_j^{\Delta t} = g_n \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \\ P_2 : \quad & \text{Löse } \sum_{j=\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor+1}^n W_{n-j}^{\Delta t} \varphi_j^{\Delta t} = g_n - v_n \quad \text{für } n = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1, \dots, N \\ \text{mit } v_n = & \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} W_{n-j}^{\Delta t} \varphi_j^{\Delta t}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Teilprobleme P_1 und P_2 sind das Ergebnis der Halbierung des gesamten Problems (2.5). Die gestrichelt dargestellte Linie in Abbildung 2.3 deutet die J -te untere Diagonale der Systemmatrix an, sodass sich die Faltungsgewichte, deren Kern wir zu interpolieren beabsichtigen, im linken unteren Dreieck befinden.

Wir nehmen an dieser Stelle an, dass das Teilproblem P_1 bereits gelöst wurde und infolgedessen die Dichten $\varphi_j^{\Delta t}$, $j = 0, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$, bekannt sind. Die Lösung dieses Teilproblems kann in rekursiver Form erfolgen, indem der Algorithmus aus [8] in unveränderter Weise angewandt wird. Ist auch die rechte Seite $g_n - v_n$, $n = \lfloor N/2 \rfloor + 1, \dots, N$, berechnet, kann das Teilproblem P_2 auf die gleiche Art gelöst werden. Zur Berechnung von v_n ist eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Matrix u in Abbildung 2.3 nötig. Wir weisen darauf hin, dass einerseits der Block c , das heißt der rechte obere Teil der Matrix u , bereits berechnet wurde, als wir das Teilproblem P_1 lösten. Folglich können wir bei der Berechnung der rechten Seite auf diesen Block zurückgreifen. Andererseits befinden sich im verbleibenden L-förmigen Teil des Matrixblockes u der Abbildung 2.3 einzig Operatoren $W_j^{\Delta t}$, für die j größer ist als J , sodass wir von der Interpolationsidee des Abschnitts 2.3.1 profitieren können. Das bedeutet insgesamt, dass wir in der Lage sind, v_n ohne Berechnung weiterer Operatoren zu bestimmen, vorausgesetzt, dass die Operatoren I_k , $k = 0, \dots, q$, aus (2.14) schon vorliegen.

Sollen größere Probleme behandelt werden, ist, schematisch gesprochen, der Abbildung 2.3 ein weiterer Dreiecksblock P_3 anzufügen, der wiederum rekursiv gelöst werden kann, wobei die rechte Seite erneut nur mit Hilfe des bekannten Blockes c und Operatoren $W_j^{\Delta t}$ mit $j \geq J$ berechnet wird.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die dargelegte algorithmische Idee in Hinblick auf die Lösung des in Abschnitt 2.4 zu besprechenden numerischen Beispiels noch nicht optimal ist. Es spricht nichts dagegen, bereits die im Teilproblem P_1 auftretenden Operatoren

$W_j^{\Delta t}$ mit $j \geq J$ zu interpolieren. Um die Implementierung einfach zu halten, verzichten wir bei unserem numerischen Experiment auf die Approximation der Operatoren in diesem Teilproblem. Dementsprechend macht sich der Interpolationsgedanke nicht zum Zeitpunkt t_J , sondern erst zu einem späteren Zeitpunkt bemerkbar.

2.3.3 Anmerkungen zur Anwendung des schnellen Faltungsalgorithmus

Der Algorithmus, den wir im Abschnitt 2.3.2 beschrieben, besitzt die Berechnungen betreffend eine Komplexität von $O(N \log^2 N)$ und den Speicherbedarf betreffend eine Komplexität von $O(N)$. Letzterer ist unter dem Gesichtspunkt von Langzeitberechnungen nicht optimal. Verbesserungen können, sofern anzuwenden, durch den schnellen Faltungsalgorithmus von Schädle et al., siehe [84, 85, 86] erreicht werden. Er benötigt, im Gegensatz zum Algorithmus aus Abschnitt 2.3.2, lediglich $O(\log N)$ aktiven Speicher. Obwohl der schnelle Faltungsalgorithmus im hier vorliegenden Fall nicht-sektorieller Operatoren nicht direkt eingesetzt werden kann, besagt der Satz 2.4, dass wir zumindest für spätere Zeitpunkte von ihm Gebrauch machen können. Obwohl diese Verbesserung unseres Algorithmus bei der Implementierung nicht berücksichtigt wurde, wollen wir die Gelegenheit nutzen und ein paar Hinweise geben, wie sich dieses Verfahren in unser Problem einfügen lässt.

Der schnelle Faltungsalgorithmus ist kein neues Quadraturverfahren zur Berechnung von Faltungsintegralen, aber ein raffinierter Algorithmus zur schnellen und Speicherplatz sparenden Berechnung von Faltungsquadraturen. Er beruht darauf, dass die Faltungsgewichte mit Hilfe der Formel der inversen Laplace-Transformation über eine hyperbelförmige Kurve γ , die sich in die linke Hälfte der komplexen Ebene erstreckt, effizient berechnet werden können. Der Satz 2.4 erlaubt es, die Gewichte $\omega_j^{\Delta t}(r)$ für $j > J$ durch

$$\omega_j^{\Delta t}(r) \approx \Delta t \cdot k(r, t_j) = \frac{\Delta t}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{s(t_j-r)} e^{sr} K(r, s) \, ds$$

zu ersetzen. Da sowohl $e^{sr} K(r, s)$ ein sektorieller Operator ist als auch $t_j > r$ gilt, kann die inverse Laplace-Transformation über eine hyperbelförmige Kurve, wie in [69] beschrieben, effizient berechnet werden.

Diese Ersetzung hat zur Folge, dass Summen der Form, siehe (2.15),

$$\sum_{j=a}^b \frac{\Delta t}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{s(t_n-j-r)} e^{sr} K(r, s) \, ds \varphi_j^{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{s(t_n-t_b-r)} \tilde{K}(r, s) \psi^{\Delta t}(t_b, s) \, ds \quad (2.16)$$

auftreten. Hierbei wurde die verkürzende Schreibweise

$$\psi^{\Delta t}(t_b, s) = \Delta t \sum_{j=a}^b e^{s(t_b-t_j)} \varphi_j^{\Delta t}$$

genutzt. Die damit vergleichbare Größe im originären schnellen Faltungsalgorithmus aus [84] erhält man dort durch das Lösen der Differentialgleichung $\psi' = s\psi + \varphi(t)$ mit Hilfe eines linearen Mehrschrittverfahrens. Aufgrund der Ersetzung der Gewichte durch die Fundamentallösung im Zeitbereich verlieren wir diese Verbindung. Dennoch ist es möglich, $\psi^{\Delta t}$ als Approximation der obigen Differentialgleichung aufzufassen. Wichtiger ist jedoch, dass wir $\psi^{\Delta t}$ über die Zeitschrittformel

$$\psi^{\Delta t}(t_{b+1}, s) = e^{s\Delta t}\psi^{\Delta t}(t_b, s) + \Delta t\varphi_{b+1}^{\Delta t}$$

gewinnen können.

Der schnelle Faltungsalgorithmus aus [84] kann nun auf die Berechnung von (2.16) angewendet werden; man vergleiche die Gleichung (4.1) in [84] mit (2.16).

Wir weisen darauf hin, dass signifikante Verbesserungen erst erreicht werden, wenn $N \gg J$, da der schnelle Faltungsalgorithmus nur für Zeitpunkte größer als t_J , mit J aus Satz 2.4, Anwendung findet. Hält man $\Delta t > 0$ fest und lässt $N \rightarrow \infty$ streben, so werden auch hier insbesondere bei Langzeitberechnungen als Konsequenz des schnellen Faltungsalgorithmus die Speicheranforderungen auf $O(\log N)$ reduziert.

Wir machen außerdem darauf aufmerksam, dass die Methode der schnellen Faltung ohne weiteres mit der Interpolationsstrategie verbunden werden kann. In diesem Fall reicht es aus, (2.16) an den Interpolationsstellen r_k auszuwerten.

2.4 Numerisches Beispiel

Dieser Abschnitt ist der numerischen Illustration der theoretischen Erkenntnisse der vorangegangenen Abschnitte dieses Kapitels gewidmet. Das Ausgangsproblem (2.1) bildet die Grundlage dieser Experimente. Wir werden im Abschnitt 2.4.1 zunächst mit der Untersuchung der Konvergenzeigenschaft des Approximationsfehlers $|\omega_n^{\Delta t}(r) - \Delta t \cdot k(r, n\Delta t)|$ für $\Delta t \rightarrow 0$ beginnen, um die im Satz 2.4 ausgewiesene Konvergenzrate zu bestätigen. Im Anschluss werden wir im Abschnitt 2.4.2 ein umfangreicheres numerisches Experiment durchführen. Es soll die Wirksamkeit der entwickelten Interpolationsstrategie unterstreichen.

2.4.1 Approximationseigenschaft der Gewichtsfunktionen

Wir wollen die Aussage des Satzes 2.4 bestätigen. Dazu betrachten wir das Problem (2.1) im dreidimensionalen Raum, setzen den Dämpfungsparameter $\alpha = 2$ und wählen für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1$. Wir sind daran interessiert, die Gewichtsfunktionen $\omega_n^{\Delta t}(r)$ aus (2.6) und die Fundamentallösung im Zeitbereich $k(r, t)$ aus (2.2) zu

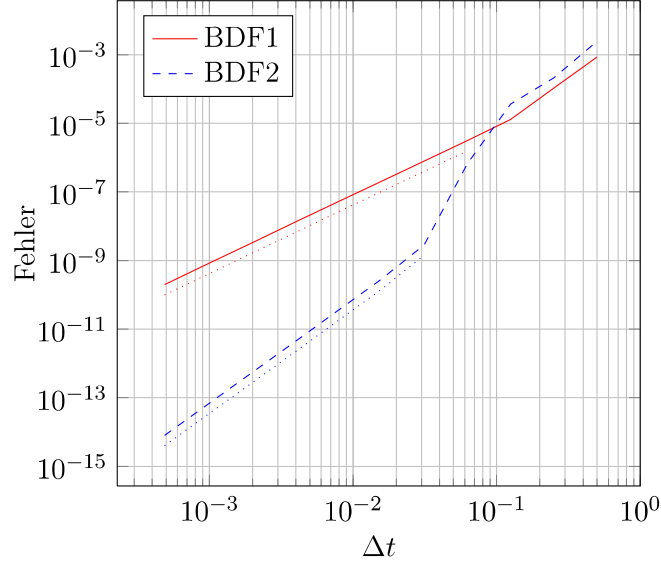


Abbildung 2.4: Fehler $|\omega_n^{\Delta t}(1) - \Delta t \cdot k(1, t_n)|$ für $t_n = 4$ aufgetragen gegen Δt für die räumlich dreidimensionale Wellengleichung mit Dämpfungsfaktor $\alpha = 2$ für verschiedene Mehrschrittverfahren

vergleichen. Die Gewichtsfunktionen sind durch das Kurvenintegral

$$\omega_n^{\Delta t}(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{4\pi r} \frac{e^{-\frac{r}{\Delta t} \sqrt{\rho(\zeta)^2 + \alpha \Delta t \cdot \rho(\zeta)}}}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

gegeben. In diesem Zusammenhang beschreibt die Kurve C einen Kreis in der komplexen Ebene, der seinen Mittelpunkt im Ursprung hat und einen Radius kleiner als eins besitzt. Die Funktion $\rho(\zeta)$ führten wir im Abschnitt 1.2 ein. Sie ist der Quotient der erzeugenden Polynome des Mehrschrittverfahrens, auf dem die Zeitdiskretisierung basiert. Die Gewichtsfunktionen können durch Anwenden der Trapezregel numerisch approximiert werden. Wir verweisen dazu auf [73].

Um nun die Konvergenzeigenschaft für $\Delta t \rightarrow 0$ zu sehen, setzen wir $r = 1$ und halten die Zeit bei $t = n\Delta t = 4$ fest. Der absolute Fehler $|\omega_n^{\Delta t}(r) - \Delta t \cdot k(r, n\Delta t)|$, der aufgrund der Approximation gemacht wird, wird in der Abbildung 2.4 gegen Δt aufgetragen.

Die Abbildung 2.4 zeigt die Auswertung bei Verwendung der Rückwärtsdifferenzenformeln der Ordnung eins und zwei. Die numerischen Resultate bestätigen die Aussage des Satzes 2.4. Es ist zu erkennen, dass die Konvergenzrate Δt^{p+1} beträgt, wenn ein BDF-Verfahren der Ordnung p zugrunde liegt. Zum Vergleich wurden diese Raten als gepunktete Linien ebenfalls in das Diagramm integriert. Darüber hinaus wird deutlich, dass bei Anwendung des BDF1-Verfahrens die asymptotische Konvergenzrate eher erreicht wird als bei dem BDF2-Verfahren, bei dem wiederum ein schnellerer präasymptotischer Bereich zu existieren scheint.

2.4.2 Ein Langzeitexperiment

Es folgt ein numerisches Experiment im dreidimensionalen Raum, dem das Problem (2.1) zugrunde liegt. Dazu sei Γ die Einheitskugel, das heißt $\Gamma = \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Der Einfachheit halber nehmen wir für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle $c = 1$ an. Nachdem wir einen Einfachschichtpotentialansatz gemacht und die Randbedingung eingesetzt haben, besteht das Problem darin, die unbekannte Größe $\varphi(x, t)$ aus der Integralgleichung

$$g(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} k(\|x - y\|, t - \tau) \varphi(y, \tau) \, d\Gamma_y \, d\tau, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (2.17)$$

mit $k(r, t)$ aus (2.2), zu bestimmen.

In Hinblick auf das numerische Experiment sei die rechte Seite $g(x, t)$ dergestalt, dass sie einen in der Zeit und im Ort separablen Ausdruck der Form $g(x, t) = g(t)e(x)$ darstellt. Hierbei ist $e(x)$ eine Eigenfunktion des Einfachschichtpotentials $\mathcal{V}(s)$, das wir in (1.9) einführen. Wie in [11] ausgeführt wird, erlaubt es diese Wahl, das Ausgangsproblem (2.17) auf ein Problem zurückzuführen, dass nur von der Zeitvariablen abhängt, da auf diese Weise auch die Lösung ein separabler Ausdruck der Art $\varphi(x, t) = \varphi(t)e(x)$ ist. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, $g(x, t)$ für einen festen Zeitpunkt konstant zu wählen. Wir setzen speziell $g(t) = \sin^5(t)$ und $e(x) = 2\sqrt{\pi}Y_0^0 = 1$, wobei Y_0^0 die Kugelflächenfunktion vom Grad null und der Ordnung null und somit eine Eigenfunktion des Einfachschichtpotentials darstellt; siehe [62, 78].

Schließlich treffen wir in Bezug auf den Dämpfungsfaktor die Wahl $\alpha = 2$ und verwenden die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1$ bei der Zeitdiskretisierung des Zeitintervalls $[0, 25]$, innerhalb dessen wir die Lösung suchen.

Mit diesem Experiment wollen wir den Einfluss auf die Lösung untersuchen, wenn wir die aus der Interpolation der Kernfunktionen der Gewichte resultierenden gestörten Faltungsgewichte anstelle der originalen Faltungsgewichte verwenden.

Bei diesem Experiment bilden die Rückwärtsdifferenzenformeln der Ordnung zwei die Grundlage der Zeitdiskretisierung und die Größe ε des Lemmas 2.2 betrage 10^{-6} . Wir halten zudem fest, dass das Gebiet einen Durchmesser von zwei aufweist. Aus der Bedingung (2.10) folgt somit $J = 62$. Wir verwenden die Lagrange-Interpolation mit Chebyshev-Knoten der zweiten Art. Die Interpolationspolynome wählen wir so, dass sie den Grad $q = 6$ beziehungsweise den Grad $q = 10$ besitzen. Infolgedessen sind die Operatoren I_k und die Interpolationskoeffizienten $\kappa_{k,j}$ für $j = J + 1, \dots, N$ und $k = 0, 1, \dots, q$ zu berechnen; siehe auch (2.14).

Obwohl die Lösung dieses einfach strukturierten Problems auch ohne Diskretisierung des Raums erfolgen kann, verwendeten wir die Galerkin-Randelementmethode mit stückweise konstanten Basisfunktionen zur Diskretisierung, um unseren Algorithmus zu testen. Die aus der Diskretisierung der Operatoren stammenden Matrizen wurden mit Unterstützung

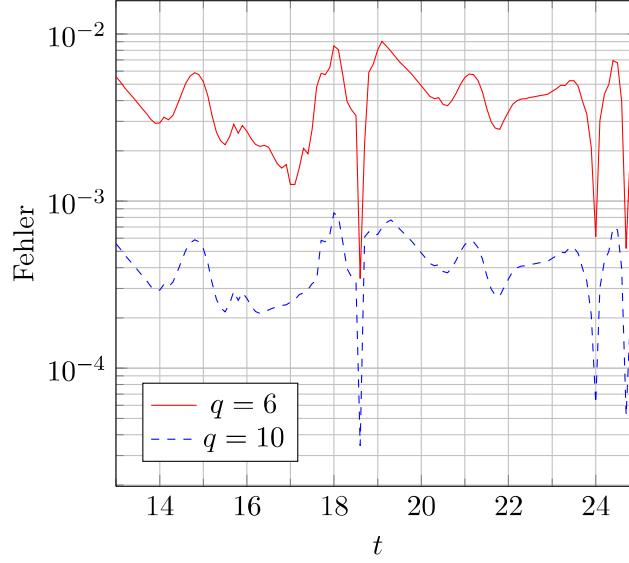


Abbildung 2.5: Langzeitexperiment der räumlich dreidimensionalen Wellengleichung mit $\alpha = 2$ und $\Delta t = 0.1$: Absoluter Fehler $|\varphi^{\Delta t}(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t)|$

der HLIBpro-Bibliothek von Ronald Kriemann, siehe [63, 64], nicht nur im $\mathcal{H}$ -Matrix-Format berechnet, sondern auch gespeichert.

Die hierarchischen Matrizen wurden in [53] eingeführt. Sie erlauben die Darstellung der hier auftretenden Matrizen in einem datenschwachen Format. Des Weiteren können Matrixoperationen wie etwa die Matrix-Vektor-Multiplikation mit fast linearem Aufwand ausgeführt werden. Einen Überblick über dieses Gebiet geben die Arbeiten [18] und [54]; siehe auch [46].

Die Berechnung der Matrizen wurde parallel ausgeführt.

Die Abbildung 2.5 zeigt den absoluten Fehler $|\varphi^{\Delta t}(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t)|$ für ein festes $x \in \Gamma$ und für verschiedene Anzahlen q von Interpolationspunkten. Wir bezeichnen mit $\varphi^{\Delta t}(x, t)$ die diskrete Lösung, die wir bei Verwendung der originalen Faltungsquadratur und mit $\tilde{\varphi}(x, t)$ die Lösung, die wir nach Approximation der Gewichte durch die Interpolationsstrategie erhielten.

Wir weisen darauf hin, dass die rechte Seite so konstruiert wurde, dass die Lösung für einen festen Zeitpunkt konstant ist und demzufolge der ausgewiesene Fehler für alle x auf dem Rand der Kugel vergleichbar ist.

Die Implementierung erfolgte in Anlehnung an den im Abschnitt 2.3.2 vorgestellten Algorithmus. Bei der numerischen Umsetzung approximierten wir die Gewichte zu den Zeiten $t > 13$. Das hat zur Folge, dass der Fehler $|\varphi^{\Delta t}(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t)|$ für $t \leq 13$ verschwindet und ein Unterschied in der Genauigkeit erst für $t > 13$ deutlich wird. Die grafische

Darstellung deutet darauf hin, dass in diesem Experiment kein signifikanter Anstieg des Fehlers bei fortschreitender Zeit zu beobachten ist.

In diesem konkreten Experiment sind wir in der Lage gewesen, im Vergleich zur Verwendung der originalen Gewichte, bei Einsatz einer Interpolation vom Grad 6 und vom Grad 10 eine Zeitersparnis von 51% beziehungsweise 49% der CPU-Zeit zu erreichen. Werden längere Rechnungen ausgeführt, sind weitere Einsparungen zu erwarten.

Die Abbildung 2.5 unterstreicht die Möglichkeit der Umsetzung dieser Interpolationsstrategie. Der vorgestellte Algorithmus ist jedoch nicht auf die hier als Grundlage gewählte Wellengleichung beschränkt. Vielmehr erlaubt dieses Interpolationsverfahren die Anwendung auf eine breitere Klasse linearer hyperbolischer Operatoren, wie sie etwa bei dynamisch viskoelastischen oder elektromagnetischen Problemen auftreten, siehe [12], da die entsprechenden Kernfunktionen eine vergleichbare Gestalt besitzen und die Voraussetzungen des Satzes 2.4 erfüllen.

FEM-CQ-BEM- Kopplungsverfahren zur Lösung von Transmissionsproblemen der Wellengleichung

Dieser zweite Hauptabschnitt wendet sich der näherungsweisen Lösung von Transmissionsproblemen der Wellengleichung zu. Solche Probleme finden sich überwiegend im Gewand von Streuproblemen, bei denen man sich für das gestreute Feld interessiert, das durch Auftreffen einer einfallenden Welle auf ein Streuobjekt entsteht.

Das gesamte Problem wird dabei, eventuell durch Einführen eines künstlichen Randes, in ein Außen- und ein Innenraumproblem geteilt. Die Separierung erfolgt derart, dass eventuelle Inhomogenitäten oder Nichtlinearitäten im Innengebiet konzentriert sind. Beide Teilprobleme stehen über Transmissionsbedingungen, die auf dem den Teilgebieten gemeinsamen Rand gestellt werden, miteinander in Beziehung.

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, eine Strategie zur Lösung von Transmissionsproblemen der Wellengleichung zu entwickeln. Dabei werden wir uns bei der Kopplung des Innenraumproblems an das Außenraumproblem der gekoppelten Finite-Elemente-Randelemente-Formulierung bedienen, die auf Johnson und Nédélec zurückgeht; siehe [60]. Die wesentlichen Grundzüge dieses Verfahrens wurden im Abschnitt 1.5 dargelegt. Ein Anliegen besteht darin, diese Variante der Kopplung von Finiter und Randelementmethoden mit unterschiedlichen Zeitdiskretisierungsmethoden für die Teilgebiete zu verbinden. Insbesondere werden wir uns einem Faltungsquadraturverfahren zur Zeitdiskretisierung im Außenraum bedienen, siehe Abschnitt 1.2, um Näherungslösungen der Transmissionsprobleme zu berechnen.

Wir beginnen dieses Kapitel mit dem Abschnitt 3.1, worin wir eine allgemeine Beschreibung derjenigen Transmissionsprobleme geben, die das Ausgangsproblem dieses Kapitels darstellen. Im Anschluss daran werden wir im Abschnitt 3.2 ein Kopplungsverfahren zur Lösung dieser Transmissionsprobleme entwickeln und diskutieren und diese Lösungsstrategie durch eine tiefergehende Analyse auf ein theoretisches Fundament stellen. Zum Abschluss werden wir dessen praktische Einsatzfähigkeit anhand numerischer Beispiele illustrieren.

3.1 Problembeschreibung

Im Folgenden betrachten wir Transmissionsprobleme im freien Raum $\mathbb{R}^3$, denen die Wellengleichung zugrunde liegt. Wir beschränken uns dabei aus Gründen der Übersichtlichkeit auf ungedämpfte Wellen. Der angesprochene freie Raum $\mathbb{R}^3$ wird bei der Behandlung des Transmissionsproblems in ein beschränktes, offenes Innengebiet Ω^- und ein unbeschränktes, zusammenhängendes Außengebiet Ω^+ geteilt. Der den beiden Teilgebieten gemeinsame Rand Γ ist vom Lipschitz-Typ. Die Abbildung 1.1 veranschaulicht die Situation grafisch.

Wir interessieren uns für die Entwicklung der Welle innerhalb eines Zeitintervalls $[0, T]$, wobei $T > 0$ einen festen Endzeitpunkt darstellt. Das Ziel besteht darin, eine Funktion $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ zu bestimmen, die das allgemeine Problem

$$\frac{1}{c(x)^2} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T] \quad (3.1)$$

mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\partial_t u(x, 0) = v_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, löst.

In Bezug auf das auftretende Eingangsdatum gelte $f(\cdot, t) \in L^2(\Omega^-)$. Schließlich bezeichne $c(x) \in L^\infty(\Omega^-)$, $c(x) > 0$, die eventuell vom Ort abhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Die Funktion $c(x)$ sei im Außengebiet Ω^+ konstant und es gelte zudem

$$\text{supp } u_0 \subset\subset \Omega^-, \quad \text{supp } v_0 \subset\subset \Omega^- \quad \text{und} \quad \text{supp } f \subset\subset \Omega^-,$$

sodass sowohl die Anfangsdaten $u_0(x) \in H_\Delta^1(\Omega^-)$ und $v_0(x) \in H_\Delta^1(\Omega^-)$ als auch der Kraftterm $f(x, t)$ jeweils einen kompakten Träger besitzen, der vollständig im Innengebiet Ω^- enthalten ist.

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Lösbarkeit des Problems (3.1).

Satz 3.1. *Das Problem (3.1) besitzt unter den oben gemachten Annahmen eine eindeutige Lösung $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$, falls die durch $\|v_0\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla u_0\|_{\Omega^-}^2$ erklärte Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ beschränkt ist.*

Beweis. Der Nachweis findet sich in [68].

□

3.2 Lösen von Transmissionsproblemen der Wellengleichung

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren zur Lösung des Ausgangsproblems (3.2) entwickeln. Wir werden in den verschiedenen Teilgebieten Ω^+ und Ω^- unterschiedliche Zeitdiskretisierungsverfahren verwenden. Insbesondere werden wir im Außengebiet ein Faltungsquadraturverfahren heranziehen, dem wir ein implizites Mehrschrittverfahren zugrunde legen; siehe Abschnitt 1.2. Im Innenraum werden wir dagegen auf das Leapfrog-Verfahren zurückgreifen, welches zu den expliziten Diskretisierungsverfahren zählt. Der Vorzug einer expliziten Methode für das Innengebiet begründet sich nicht allein in ihrer einfacheren und kostengünstigeren numerischen Behandlung. Von Vorteil ist dabei auch, dass gerade bei nichtlinearen Problemen die aufwändige iterative Berechnung umgangen werden kann. Die Wahl des expliziten Zeitdiskretisierungsverfahrens führt, da es nur bedingt stabil ist, jedoch zur Einschränkung der Größe der Zeitschrittweite. Wir sind deshalb bestrebt, die in Ω^+ und Ω^- gestellten Probleme weitestgehend separat zu behandeln, um den Einsatz verschiedener Zeitschrittweiten zu ermöglichen. Auf diese Weise können wir die Zeitschrittweite im Außengebiet unabhängig von der im Innengebiet wählen. Das wiederum bedeutet in Bezug auf das Faltungsquadraturverfahren eine Ersparnis der Kosten, da im Vergleich zur Verwendung der kleineren Zeitschrittweite des Innengebietes weniger Faltungsintegrale ausgewertet und weniger Faltungsgewichte berechnet werden müssen.

Wir besprechen im Abschnitt 3.2.1 die Teilprobleme des Innen- und Außengebietes und erläutern die Strategie, mit deren Hilfe wir diese Teilprobleme koppeln. Im folgenden Abschnitt 3.2.2 gehen wir im Detail auf die Raum-Zeit-Diskretisierung des Kopplungsverfahrens ein. Im Anschluss daran diskutieren wir im Abschnitt 3.2.4 die praktische Umsetzung der Ideen.

3.2.1 Kontinuierliches Problem

Wir betrachten das allgemeine Transmissionsproblem der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{c(x)^2} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) \quad (x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times [0, T] \\ [\gamma_0 u] &= 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\ [\gamma_1 u] &= 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\partial_t u(x, 0) = v_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$.

In diesem Zusammenhang erinnern wir an den im Abschnitt 1.1 eingeführten Sprung $[\gamma_0 u] := \gamma_0^- u - \gamma_0^+ u$ und den Normalensprung $[\gamma_1 u] := \gamma_1^- u - \gamma_1^+ u$.

Aus der Formulierung des Transmissionsproblems (3.2) wird deutlich, dass es sich in zwei separate Probleme teilen lässt, die über die Transmissionsbedingungen auf dem gemeinsamen Rand der jeweiligen Teilgebiete miteinander verbunden sind.

Wir wenden uns zunächst dem Teilproblem im Innenraum zu. Dieses wird durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t^2 u(x, t)}{c(x)^2} - \Delta u(x, t) &= f(x, t) & (x, t) \in \Omega^- \times [0, T] \\ \gamma_1^- u(x, t) &= g^N(x, t) & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega^- \end{aligned} \quad (3.3)$$

beschrieben. Hierbei gilt mit der entsprechenden Transmissionsbedingung des Ausgangsproblems (3.2), dass die Randbedingung gemäß $g^N(x, t) := \gamma_1^+ u(x, t)$ definiert ist. Wenn wir unterstellen, dass das Neumann-Randdatum $\gamma_1^+ u(x, t)$ bekannt ist, liegt ein inneres Neumann-Problem für die möglicherweise inhomogene Wellengleichung vor. Wir geben für dieses Innenraumproblem die schwache Formulierung an. Dazu multiplizieren wir die starke Form mit Testfunktionen $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ und suchen $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$, sodass

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Omega^-} + \left(\frac{\partial_t^2 u}{c(x)^2}, v \right)_{\Omega^-} = (f, v)_{\Omega^-} + \langle \gamma_1^- u, \gamma_0^- v \rangle_\Gamma \quad \forall v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-) \quad (3.4)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ und } \partial_t u(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega^-,$$

erfüllt wird.

Wir fahren mit der Betrachtung des Außenraumproblems fort. Da sowohl $f(x, t)$ als auch die Anfangswerte u_0 und v_0 einen ganz in Ω^- enthaltenen kompakten Träger besitzen, lautet dieses

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega^+ \times [0, T] \\ \gamma_0^+ u(x, t) &= g^D(x, t) & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\ u(x, 0) &= \partial_t u(x, 0) = 0 & x \in \Omega^+, \end{aligned} \quad (3.5)$$

wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit c konstant ist. In diesem Zusammenhang gilt mit der Transmissionsbedingung in (3.2) $g^D(x, t) := \gamma_0^- u(x, t)$. Unter der Annahme, dass die Spur $\gamma_0^- u(x, t)$ bekannt ist, handelt es sich bei (3.5) um ein äußeres Dirichlet-Problem. Die Wellengleichung, die es hier zu lösen gilt, ist im Unterschied zum Teilproblem (3.3) homogen und besitzt vorgegebene Nullanfangsbedingungen. Für diese Klasse von Problemen existiert eine eindeutige Lösung, sofern g^D hinreichend glatt ist und g^D sowie wenigstens dessen erste Zeitableitung in $t = 0$ verschwinden. Wir lösen (3.5), indem wir die direkte Randintegralmethode anwenden. Die Lösung im Gebiet Ω^+ lässt sich nach der direkten Methode, siehe [65], durch

$$u(x, t) = \mathcal{D}(\partial_t) \gamma_0^+ u(x, t) - \mathcal{S}(\partial_t) \gamma_1^+ u(x, t), \quad x \in \Omega^+, \quad t \in [0, T],$$

beschreiben. Nachdem wir den äußeren Spuoperator angewendet und die daraus resultierenden Terme umgeordnet haben, erhalten wir

$$\mathcal{V}(\partial_t) \gamma_1^+ u(x, t) = \left(\mathcal{K} - \frac{1}{2} \mathcal{I} \right) (\partial_t) \gamma_0^+ u(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \quad (3.6)$$

wobei $\mathcal{V}(\partial_t)$ und $\mathcal{K}(\partial_t)$ die Spur des retardierten Einfach- beziehungsweise Doppelschicht-potentials beschreiben; siehe (1.21) beziehungsweise (1.22).

Wir definieren die äußere Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung, die einer Lösung des äußeren Dirichlet-Problems die Neumann-Daten zuordnet, gemäß

$$DtN^+(\partial_t) := \left(\mathcal{V}^{-1} \left(\mathcal{K} - \frac{1}{2} \mathcal{I} \right) \right) (\partial_t).$$

Aufgrund der Eigenschaften der Faltung lässt sich die Gleichung (3.6) mit Hilfe des soeben erklärten Dirichlet-zu-Neumann-Operators in die äquivalente Darstellung

$$\gamma_1^+ u(x, t) = DtN^+(\partial_t) \gamma_0^+ u(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T] \quad (3.7)$$

überführen.

Wir testen die Gleichung (3.7) mit Testfunktionen $\psi(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma)$ und gelangen so zur schwachen Formulierung

$$\left\langle \gamma_1^+ u, \psi \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^+ u, \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad \forall \psi(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (3.8)$$

mit vorgegebenen Nullanfangsbedingungen für u .

Die beiden Teilprobleme (3.4) und (3.8) werden über die Kopplungsterme auf dem Rand miteinander verbunden. Um diese Kopplung umsetzen zu können, ersetzen wir die Randdaten in (3.8) durch die Übergangsbedingungen des Ausgangsproblems (3.2). Das führt zu folgender modifizierten Formulierung des Außenraumproblems

$$\langle \gamma_1^- u, \psi \rangle_{\Gamma} = \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u, \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad \forall \psi(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma),$$

in der nun die innere Dirichlet- und die innere Neumann-Spur auftreten, sodass die Kopplung an das Innenraumproblem (3.4) erfolgen kann. Das finale Kopplungsproblem lautet:

Finde $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ und $\varphi(\cdot, t) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\left(\frac{1}{c(x)^2} \ddot{u}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega^-} = (f, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \quad (3.9a)$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\Gamma} = \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u, \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.9b)$$

mit den Anfangswerten $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$ für alle Testfunktionen $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ und $\psi(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit machten und machen wir im Folgenden die partiellen Ableitungen nach der Zeit durch Punkte deutlich.

Den Nachweis, dass eine eindeutige Lösung des Kopplungsproblems (3.9) existiert, werden wir mit Hilfe eines Energieargumentes erbringen. Aus diesem Anlass führen wir die Energie

$$E_\sigma(t) := \frac{1}{2} \left\| e^{-\sigma t} \frac{\dot{u}}{c} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{1}{2} \| e^{-\sigma t} \nabla u \|_{\Omega^-}^2 \quad (3.10)$$

mit $\sigma \geq 0$ ein. Speziell für $E_0(t)$ verzichten wir in der Folge auf den Index und schreiben kurz $E(t)$. Insbesondere stellt sich $E(t)$ als Summe aus kinetischer und potentieller Energie dar.

Wir testen das Teilproblem (3.9a) mit der speziellen Belegung $v = \dot{u}$ sowie (3.9b) mit $\psi = \gamma_0^- \dot{u}$. Hiernach summieren wir die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen auf und gelangen zu

$$\left(\frac{1}{c(x)^2} \ddot{u}, \dot{u} \right)_{\Omega^-} + (\nabla u, \nabla \dot{u})_{\Omega^-} = (f, \dot{u})_{\Omega^-} + \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u, \gamma_0^- \dot{u} \right\rangle_\Gamma. \quad (3.11)$$

Anschließend multiplizieren wir (3.11) mit $e^{-2\sigma t}$. Das führt unter Berufung auf

$$\frac{d}{dt} E_\sigma(t) = e^{-2\sigma t} \left((\nabla u, \nabla \dot{u})_{\Omega^-} + \left(\frac{\ddot{u}}{c(x)^2}, \dot{u} \right)_{\Omega^-} \right) - \sigma e^{-2\sigma t} \left(\left\| \frac{\dot{u}}{c} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla u\|_{\Omega^-}^2 \right)$$

zu der Beziehung

$$\frac{d}{dt} E_\sigma(t) = -\sigma e^{-2\sigma t} \left(\left\| \frac{\dot{u}}{c} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla u\|_{\Omega^-}^2 \right) + e^{-2\sigma t} (f, \dot{u})_{\Omega^-} + e^{-2\sigma t} \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u, \gamma_0^- \dot{u} \right\rangle_\Gamma.$$

Dieses Resultat integrieren wir über das Zeitintervall $[0, t]$, sodass wir mit $\sigma = 1/T$ und mit $E_\sigma(t) \geq e^{-2\sigma T} E(t)$, da $t \leq T$ ist, schließlich zu

$$e^{-2} E(t) \leq E(0) + \int_0^t e^{-2\tau/T} (f, \dot{u})_{\Omega^-} d\tau + \int_0^t e^{-2\tau/T} \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u, \gamma_0^- \dot{u} \right\rangle_\Gamma d\tau \quad (3.12)$$

gelangen. Das Erfordernis der Skalierung mit dem Faktor $e^{-2\sigma t}$ in der vorangegangenen Rechnung wird durch das folgende Lemma deutlich.

Lemma 3.2. *Es sei DtN^+ die äußere Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung. Dann gilt für $t \in [0, T]$*

$$- \int_0^t e^{-2\tau/T} \left\langle DtN^+(\partial_t) \psi(\cdot, \tau), \dot{\psi}(\cdot, \tau) \right\rangle_\Gamma d\tau \geq \frac{1}{T e^2} \int_0^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2 + \|\dot{u}(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2 d\tau$$

für alle $\psi(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma)$, wobei $u := \mathcal{D}(\partial_t) \psi - \mathcal{S}(\partial_t)(DtN^+(\partial_t) \psi)$.

Beweis. In der Beweisführung greifen wir auch auf Ideen aus [10] zurück. Wir definieren zunächst

$$u := \mathcal{D}(\partial_t) \psi - \mathcal{S}(\partial_t)(DtN^+(\partial_t) \psi),$$

sodass u die homogene Wellengleichung mit Nullanfangsbedingungen im Teilgebiet Ω^+ löst. Es sei weiterhin $\hat{u} := \mathcal{L}u$ die Laplace-Transformation von u . Mit $s \in \mathbb{C}$, wobei $s = \sigma + i\mu$ mit $\sigma = 1/T$ gilt, ergibt sich

$$-\operatorname{Re} \langle DtN^+(s)\gamma_0^+\hat{u}, s\gamma_0^+\hat{u} \rangle_\Gamma = \operatorname{Re} \langle -\gamma_1^+\hat{u}, s\gamma_0^+\hat{u} \rangle_\Gamma.$$

Wenden wir darauf die Green-Formel

$$\langle -\gamma_1^+\hat{u}, \gamma_0^+v \rangle_\Gamma = (\nabla\hat{u}, \nabla v)_{\Omega^+} + (\Delta\hat{u}, v)_{\Omega^+}$$

an und benutzen die Tatsache, dass $\hat{u}$ die homogene Helmholtz-Gleichung löst, mit anderen Worten, dass $\hat{u}$ die Gleichung $-\Delta\hat{u} + s^2\hat{u} = 0$ erfüllt, können wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle -\gamma_1^+\hat{u}, s\gamma_0^+\hat{u} \rangle_\Gamma &= \operatorname{Re} (\bar{s} (\nabla\hat{u}, \nabla\hat{u})_{\Omega^+}) + \operatorname{Re} (s (s\hat{u}, s\hat{u})_{\Omega^+}) \\ &= \sigma \|\nabla\hat{u}\|_{\Omega^+}^2 + \sigma |s|^2 \|\hat{u}\|_{\Omega^+}^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

folgern. Wir weisen darauf hin, dass die Sesquilinearform in vorangegangener Rechnung definitionsgemäß linear im ersten und antilinear im zweiten Argument ist.

Für die weitere Betrachtung nehmen wir an, dass $\psi(\cdot, \tau)$ kausal ist, das bedeutet, dass $\psi(\cdot, \tau) = 0$, falls $\tau \leq 0$. Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty e^{-2\tau/T} \left\langle DtN^+(\partial_t)\gamma_0^+u(\cdot, \tau), \gamma_0^+\dot{u}(\cdot, \tau) \right\rangle_\Gamma d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-2\tau/T} \left\langle -DtN^+(\partial_t)\gamma_0^+u(\cdot, \tau), \gamma_0^+\dot{u}(\cdot, \tau) \right\rangle_\Gamma d\tau. \end{aligned}$$

Für kausale Funktionen f gilt zwischen der Laplace-Transformation und der Fourier-Transformation, mit $s = \sigma + i\omega$, die Beziehung

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty e^{-\sigma\tau} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma\tau} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = \mathcal{F}(e^{-\sigma t}f(t)).$$

Unter Berücksichtigung der Parseval-Gleichung, siehe [67], in Verbindung mit dieser Beziehung sowie (3.13) führt das weiter zu

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty e^{-2\tau/T} \left\langle -DtN^+(\partial_t)\gamma_0^+u(\cdot, \tau), \gamma_0^+\dot{u}(\cdot, \tau) \right\rangle_\Gamma d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left\langle -e^{-\tau/T} DtN^+(\partial_t)\gamma_0^+u(\cdot, \tau), e^{-\tau/T} \gamma_0^+\dot{u}(\cdot, \tau) \right\rangle_\Gamma d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left\langle -DtN^+(s)\gamma_0^+\hat{u}, s\gamma_0^+\hat{u} \right\rangle_\Gamma d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^\infty (\|\nabla\hat{u}\|_{\Omega^+}^2 + |s|^2 \|\hat{u}\|_{\Omega^+}^2) d\omega. \end{aligned}$$

Der Satz von Plancherel als Spezialfall der Parseval-Gleichung in Bezug auf L^2 -Normen zeigt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} (\|\nabla \widehat{u}\|_{\Omega^+}^2 + \|s\widehat{u}\|_{\Omega^+}^2) \, d\omega \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-2\tau/T} (\|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2 + \|\dot{u}(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2) \, d\tau. \end{aligned}$$

Aufgrund der Kausalität lässt sich der Integrationsbereich auf das Intervall $[0, t]$, $t < T$, einschränken, sodass sich

$$\begin{aligned} & - \int_0^t e^{-2\tau/T} \left\langle DtN^+(\partial_t)\gamma_0^+ u(\cdot, \tau), \gamma_0^+ \dot{u}(\cdot, \tau) \right\rangle_{\Gamma} \, d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^t e^{-2\tau/T} (\|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2 + \|\dot{u}(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2) \, d\tau \\ &\geq \frac{1}{Te^2} \int_0^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2 + \|\dot{u}(\cdot, \tau)\|_{\Omega^+}^2 \, d\tau \end{aligned}$$

ergibt und damit die Aussage des Lemmas. $\square$

Bemerkung 3.3. *Das Lemma 3.2 in Kombination mit (3.12) zeigt, dass, wenn $f \equiv 0$ gilt, die Energie zum Zeitpunkt t durch die Anfangsenergie beschränkt wird.*

Die Lösbarkeit des Problems (3.9) ergibt sich aus der Tatsache, dass es aus dem Ausgangsproblem (3.2) lediglich durch den Übergang zur schwachen Formulierung – nach Multiplikation mit geeigneten Testfunktionen, Integration über das jeweilige Gebiet und Anwendung der Green-Formel – und anschließender Einbeziehung der Transmissionsbedingungen hervorgeht. Die Bemerkung 3.3 gibt Anlass zu nachstehendem Lemma, das auf die eindeutige Lösbarkeit des gekoppelten Problems (3.9) abzielt.

Lemma 3.4. *Obige Kopplungsstrategie gestattet die eindeutige Lösbarkeit des Transmissionsproblems (3.2).*

Beweis. Das Problem (3.1) erfüllt die Transmissionsbedingungen in (3.2), womit die Existenz der Lösung des Problems (3.2) aus dem Satz 3.1 folgt.

Wir führen den Beweis der Eindeutigkeit durch Widerspruch. Wir nehmen an, es gäbe zwei voneinander verschiedene Lösungen $u_1(x, t) \neq u_2(x, t)$ des Transmissionsproblems (3.2). Die Differenz $u(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t) \not\equiv 0$ erfüllte folglich

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{u}(x, t)}{c(x)^2} - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \times [0, T] \\ & [\gamma_0 u] = 0, \quad [\gamma_1 u] = 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$.

Hinsichtlich dieses konkreten Problems zeigt das Lemma 3.2, dass $E(t) \leq e^2 E(0)$ gilt. Einerseits folgt aus der Definition (3.10) der Energie die Gültigkeit von $E(0) = 0$, da hier Nullanfangsbedingungen vorliegen, andererseits ist $E(t)$ per Definition nichtnegativ für alle $t \geq 0$. Daraus schließen wir $E(t) = 0$ und mithin, dass u konstant ist. Aus den Nullanfangsbedingungen ergibt sich somit $u \equiv 0$. Da das im Widerspruch zur Annahme steht, ist der Beweis erbracht. $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir das folgende Resultat bezüglich der Stabilität.

Lemma 3.5. *Die Energie $E(t)$ in (3.10) erfüllt für $t \in [0, T]$ die Schranke*

$$E(t) \leq C \cdot \left(E(0) + \frac{t}{2} \int_0^t \|f(\cdot, \tau)\|_{\Omega^-}^2 d\tau \right).$$

Die Konstante C hängt dabei nicht von t ab.

Beweis. Aus (3.12) und dem Lemma 3.2 erhalten wir

$$E(t) \leq e^2 \left(E(0) + \left| \int_0^t e^{-2\tau/T} (f, \dot{u})_{\Omega^-} d\tau \right| \right).$$

Die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel auf den Integralterm ergibt zunächst

$$E(t) \leq e^2 \left(E(0) + \frac{t}{2} \int_0^t e^{-2\tau/T} \|f(\cdot, \tau)\|_{\Omega^-}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2\tau/T} \frac{1}{t} \|\dot{u}(\cdot, \tau)\|_{\Omega^-}^2 d\tau \right)$$

und wegen $e^{-2\tau/T} \leq 1$, falls $\tau \geq 0$, weiter

$$E(t) \leq e^2 \left(E(0) + \frac{t}{2} \int_0^t \|f(\cdot, \tau)\|_{\Omega^-}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t} \|\dot{u}(\cdot, \tau)\|_{\Omega^-}^2 d\tau \right).$$

Den Term, der $\dot{u}$ enthält, schätzen wir mit Hilfe der Energie $E(t)$ in (3.10) ab. Mit Berücksichtigung des Gronwall-Lemmas in Integralform, siehe [48], erhalten wir die Schranke

$$E(t) \leq C \left(E(0) + \frac{t}{2} \int_0^t \|f(\cdot, \tau)\|_{\Omega^-}^2 d\tau \right),$$

mit der wir den Beweis beenden. $\square$

3.2.2 Diskretes Problem

In diesem Abschnitt werden wir, den vorangegangenen Ausführungen folgend, eine Kopplungsvariante ableiten, die eine perfekte Energiebilanz sichert, wenn das Ausgangsproblem (3.2) in Raum und Zeit diskretisiert wird.

Raumdiskretisierung

Wir beginnen die Diskussion des diskreten Problems mit der Einführung der Semidiskretisierung bezüglich der räumlichen Variablen. Hier verwenden wir eine Galerkin-Finite-Elemente-Diskretisierung im Innengebiet Ω^- und eine Galerkin-Randelement-Diskretisierung auf dem Rand Γ . Wir wählen dazu ein reguläres Finite-Elemente-Gitter $\mathcal{G}_{FEM}$ in Ω^- , das ausschließlich aus linearen Lagrange-Tetraedern besteht, sowie ein reguläres Randelementgitter $\mathcal{G}_{BEM}$ auf Γ . Den Begriff eines regulären Gitters verwenden wir in diesem Kontext im Sinne der Triangulierung nach Ciarlet; siehe [22] oder [19]. Außerdem nehmen wir an, dass das Randgitter $\mathcal{G}_{BEM}$ und das Volumengitter $\mathcal{G}_{FEM}$ kompatibel sind. Unter der Kompatibilität verstehen wir, dass die Knoten des Gitters $\mathcal{G}_{BEM}$ mit den Randknoten des Gitters $\mathcal{G}_{FEM}$ zusammenfallen. Diese Einschränkung zieht lediglich eine weniger aufwändige Umsetzung der numerischen Experimente nach sich, als es bei der Behandlung nichtkompatibler Gitter notwendig wäre.

Mit der Menge der Polynome vom Grad $k \in \mathbb{N}$ in einem Gebiet D , die wir mit $\mathcal{P}^k(D)$ bezeichnen, führen wir die nachfolgenden endlichdimensionalen Räume der stückweise konstanten und der stetigen, stückweise linearen Funktionen auf Γ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h^0(\Gamma) &:= \left\{ g \in L^2(\Gamma) : g|_T \in \mathcal{P}^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{G}_{BEM} \right\} \\ \text{und } \mathcal{P}_h^1(\Gamma) &:= \left\{ g \in C^0(\Gamma) : g|_T \in \mathcal{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{G}_{BEM} \right\}, \end{aligned}$$

sowie den endlichdimensionalen Raum der stetigen, stückweise linearen Funktionen in Ω^- ,

$$\mathcal{P}_h^1(\Omega^-) := \left\{ g \in C^0(\Omega^-) : g|_T \in \mathcal{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{G}_{FEM} \right\},$$

ein.

Das semidiskrete Äquivalent zu dem kontinuierlichen Problem (3.9) lässt sich wie folgt formulieren:

Finde $u^h(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\varphi^h(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c(x)^2} \ddot{u}^h, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u^h, \nabla v)_{\Omega^-} &= (f, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \\ \langle \varphi^h, \psi \rangle_{\Gamma} &= \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u^h, \psi \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit den Anfangswerten $u^h(0) = u_0^h$ und $\dot{u}^h(0) = v_0^h$ für alle $v(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\psi(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$ erfüllt wird. Dabei gehen u_0^h und v_0^h jeweils aus der L^2 -Projektion von $u_0(x)$ und $v_0(x)$ auf den endlichdimensionalen Raum $\mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ hervor. Für dieses räumlich-diskrete Problem ergibt sich analog zu den Ausführungen des Abschnittes 3.2.1 die Eindeutigkeitsaussage der Lösung mit Hilfe eines Energieargumentes.

Wir wollen eine Abschätzung bezüglich des Fehlers zwischen der Lösung des kontinuierlichen Kopplungsproblems (3.9) und des semidiskreten Pendanten (3.14) angeben. Dazu

werden zusätzliche Aussagen benötigt, die das Lemma 3.6 bereitstellt. Es gibt Auskunft über die Koerzivität und Stetigkeit der Sesquilinearform

$$a(u, v) := (s^2 u, v)_{\Omega^-} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega^-} - \left\langle DtN^+(s) \gamma_0^- u, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma}. \quad (3.15)$$

Lemma 3.6. *Die in (3.15) definierte Sesquilinearform erfüllt für alle $u \in H^1(\Omega^-)$ mit $s \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} s \geq \sigma > 0$ die nachstehenden Relationen*

(a)

$$\operatorname{Re} a(u, su) \geq \sigma \|u\|_{1,|s|}^2$$

und für alle $v \in H^1(\Omega^-)$

(b)

$$|a(u, v)| \leq C(\sigma) |s|^2 \max\{1, 1/\sigma^2\} \|u\|_{1,|s|} \|v\|_{1,|s|}.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Aussage (a). Wir testen (3.15) mit $v = su$ und erhalten für den Realteil der Sesquilinearform die Beziehung

$$\operatorname{Re} a(u, su) = \operatorname{Re} (s^2 u, su)_{\Omega^-} + \operatorname{Re} (\nabla u, s \nabla u)_{\Omega^-} - \operatorname{Re} \left\langle DtN^+(s) \gamma_0^- u, s \gamma_0^- u \right\rangle_{\Gamma},$$

die sich nach Berufung auf

$$-\operatorname{Re} \left\langle DtN^+(s) \gamma_0^- u, s \gamma_0^- u \right\rangle_{\Gamma} \geq 0,$$

eine Feststellung, die wir bereits im Beweis des Lemmas 3.2 herleiteten, zu

$$\operatorname{Re} a(u, su) \geq \operatorname{Re} (s^2 u, su)_{\Omega^-} + \operatorname{Re} (\nabla u, s \nabla u)_{\Omega^-}$$

vereinfacht. Daraus schließen wir weiter

$$\operatorname{Re} a(u, su) \geq \sigma |s|^2 \|u\|_{\Omega^-}^2 + \sigma \|\nabla u\|_{\Omega^-}^2 = \sigma \|u\|_{1,|s|}^2$$

und folglich die Aussage (a).

Wir wenden uns der Aussage (b) zu. Nach Einsatz der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$|a(u, v)| \leq \left| (s^2 u, v)_{\Omega^-} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega^-} \right| + \left| \left\langle DtN^+(s) \gamma_0^- u, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} \right|.$$

Den ersten Summanden können wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel weiter abschätzen. Für den zweiten Summanden verwenden wir mit $\operatorname{Re} s > 0$ die Schranke

$$\|DtN^+(s)\|_{H^{-1/2}(\Gamma) \leftarrow H^{1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{C}(\sigma) |s|^2 \quad \forall s,$$

wobei $\tilde{C}(\sigma) = 1/(\sigma \cdot \min\{1, \sigma\})$, die sich aus [66, Proposition 3] in Verbindung mit [66, Proposition 18] ergibt. Somit haben wir

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u\|_{1,|s|} \|v\|_{1,|s|} + \tilde{C}(\sigma) |s|^2 \|u\|_1 \|v\|_1 \\ &\leq \left(\tilde{C}(\sigma) + 1 \right) |s|^2 \max\{1, 1/\sigma^2\} \|u\|_{1,|s|} \|v\|_{1,|s|} \end{aligned}$$

und mithin die Behauptung. $\square$

Die Details zur angesprochenen Fehlerabschätzung enthält der nachstehende Satz.

Satz 3.7. *Es seien $u^h(t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ Lösung des semidiskreten gekoppelten Problems (3.14) und $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ Lösung des kontinuierlichen gekoppelten Problems (3.9). Falls zudem $u(\cdot, t) \in H^2(\Omega^-)$ ist, so gilt für $t > 0$, $t \in [0, T]$, die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} & \|\dot{u} - \dot{u}^h\|_{\Omega^-} + \|\nabla(u - u^h)\|_{\Omega^-} \\ & \leq C\|v_0 - v_0^h\|_{\Omega^-} + C\|\nabla u_0 - \nabla u_0^h\|_{\Omega^-} + CTh \max\{T^2, 1\} \left(\|u^{(4)}\|_1 + \|u^{(3)}\|_2 \right). \end{aligned}$$

Beweis. Zum Nachweis betrachten wir zunächst $\tilde{u}(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ als Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{u}(x, t) - \Delta \tilde{u}(x, t) &= f(x, t) \quad (x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times [0, T] \\ [\gamma_0 \tilde{u}] &= 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\ [\gamma_1 \tilde{u}] &= 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\tilde{u}(x, 0) = u_0^h$ und $\partial_t \tilde{u}(x, 0) = v_0^h$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, wobei die Anfangsbedingungen u_0^h und v_0^h die L^2 -Projektionen aus (3.14) darstellen. Der Fehler $\tilde{e} := u - \tilde{u}$ erfüllt dann

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \tilde{e}(x, t) - \Delta \tilde{e}(x, t) &= 0 \quad (x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \times [0, T] \\ [\gamma_0 \tilde{e}] &= [\gamma_1 \tilde{e}] = 0 \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\tilde{e}(x, 0) = u_0 - u_0^h$ und $\partial_t \tilde{e}(x, 0) = v_0 - v_0^h$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Mit Hilfe des Lemmas 3.5 sind wir in der Lage, die Abschätzung

$$\|\partial_t \tilde{e}\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega^-}^2 \leq C\|v_0 - v_0^h\|_{\Omega^-}^2 + C\|\nabla u_0 - \nabla u_0^h\|_{\Omega^-}^2$$

abzuleiten.

Weiterhin betrachten wir mit Testfunktionen $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ die schwache Formulierung für die Differenz $\tilde{u} - u^h$,

$$\left(\partial_t^2 (\tilde{u} - u^h), v \right)_{\Omega^-} + \left(\nabla (\tilde{u} - u^h), \nabla v \right)_{\Omega^-} - \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- (\tilde{u} - u^h), \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} = 0,$$

mit Nullanfangsbedingungen. Wir testen speziell mit $v = \partial_t (\tilde{u} - u^h)$ und führen mit $\hat{u} := \mathcal{L} \tilde{u}$ sowie mit $\hat{u}^h := \mathcal{L} u^h$ die Laplace-Transformierten von $\tilde{u}$ und u^h ein. Die Behauptung dieses Satzes können wir nun mit Hilfe des Lemmas 3.6, das die Koerzivität und die Beschränktheit der Sesquilinearform

$$\begin{aligned} a \left(\hat{u} - \hat{u}^h, s \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right) \right) &= \left(s^2 \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right), s \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right) \right)_{\Omega^-} \\ &+ \left(\nabla \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right), s \nabla \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right) \right)_{\Omega^-} - \left\langle DtN^+(s) \gamma_0^- \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right), s \gamma_0^- \left(\hat{u} - \hat{u}^h \right) \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

mit $\operatorname{Re} s = \sigma > 1/T$ zeigt, nachweisen. Unter Berufung auf die Galerkin-Orthogonalität wird für beliebige $v^h \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - \hat{u}^h\|_{1,|s|}^2 &\leq \frac{1}{\sigma} |a(\hat{u} - \hat{u}^h, s(\hat{u} - \hat{u}^h))| \\ &= \frac{1}{\sigma} |a(\hat{u} - \hat{u}^h, s(\hat{u} - v^h)) + a(\hat{u} - \hat{u}^h, s(v^h - \hat{u}^h))| \\ &= \frac{1}{\sigma} |a(\hat{u} - \hat{u}^h, s(\hat{u} - v^h))| \\ &\leq CT|s|^3 \max\{1, 1/\sigma^2\} \|\hat{u} - \hat{u}^h\|_{1,|s|} \|\hat{u} - v^h\|_{1,|s|} \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\|\hat{u} - \hat{u}^h\|_{1,|s|} \leq CT|s|^3 \max\{1, T^2\} \|\hat{u} - v^h\|_{1,|s|}$$

deutlich. Wählen wir speziell $v^h = I_h \hat{u}$, wobei $I_h : H^1(\Omega^-) \rightarrow \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ einen Interpolationsoperator beschreibt, der

$$\|\hat{u} - I_h \hat{u}\|_{\Omega^-} \leq Ch \|\hat{u}\|_1 \quad \text{und} \quad \|\nabla(\hat{u} - I_h \hat{u})\|_{\Omega^-} \leq Ch \|\hat{u}\|_2$$

erfüllt, so erhalten wir

$$\|\hat{u} - \hat{u}^h\|_{1,|s|} \leq CTh|s|^3 \max\{1, T^2\} (\|s\hat{u}\|_1 + \|\hat{u}\|_2)$$

und daraus folgt nach Rücktransformation dieses Resultats mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation sowie der Beziehung

$$\|u - u^h\|_{\Omega^-} \leq \|u - \tilde{u}\|_{\Omega^-} + \|\tilde{u} - u^h\|_{\Omega^-}$$

die Behauptung. □

Bemerkung 3.8. *An dieser Stelle merken wir an, dass die Definition*

$$DtN^+ := \mathcal{V}^{-1}(\mathcal{K} - 1/2\mathcal{I})$$

des in (3.14) verwendeten kontinuierlichen Dirichlet-zu-Neumann-Operators keine direkte Galerkin-Diskretisierung erlaubt. Infolgedessen können wir nur eine Approximation DtN_h^+ des Operators diskretisieren. Für den weiteren Verlauf der Arbeit nehmen wir an, dass diese Approximation einen im Sinne des Lemmas 3.2 positiven Operator darstellt. Wir werden diese Annahme später für eine Auswahl konkreter Gebiete numerisch verifizieren. Bezüglich dieser Problematik verweisen wir auf den Abschnitt 3.3. Wir machen darauf aufmerksam, dass mit der unterstellten Positivität der Approximation DtN_h^+ die für den kontinuierlichen Dirichlet-zu-Neumann-Operator geltenden Resultate, die wir im weiteren Verlauf erarbeiten werden, auf dessen Approximation übertragen werden können.

In Hinblick auf die Approximation DtN_h^+ des Dirichlet-zu-Neumann-Operators betrachten wir die Variationsformulierung

$$\left\langle \eta, \mathcal{V}\varphi \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle \eta, \left(\mathcal{K} - \frac{1}{2}\mathcal{I} \right) \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad \forall \eta \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma), \quad (3.16)$$

durch die der Operator

$$\begin{aligned} DtN_h^+ : H^{1/2}(\Gamma) \supset \mathcal{P}_h^1(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{P}_h^0(\Gamma) \\ \psi &\mapsto DtN_h^+ \psi = \varphi \end{aligned}$$

definiert wird. Berücksichtigt man die Approximation des kontinuierlichen Dirichlet-zu-Neumann-Operators, so geht das semidiskrete Problem (3.14) in das folgende Problem über:

Finde $u^h(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\varphi^h(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c(x)^2} \ddot{u}^h, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u^h, \nabla v)_{\Omega^-} &= (f, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \\ \langle \varphi^h, \psi \rangle_{\Gamma} &= \left\langle DtN_h^+(\partial_t) \gamma_0^- u^h, \psi \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit den Anfangswerten $u^h(0) = u_0^h$ und $\dot{u}^h(0) = v_0^h$ für alle $v(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\psi(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$ erfüllt wird. Für dieses Problem ergibt sich aufgrund der Annahme der Positivität von DtN_h^+ ebenfalls die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|_{\pm 1/2, r}$ die Norm des in (1.29) eingeführten Raumes $H_0^r(0, T; H^{\pm 1/2}(\Gamma))$ und formulieren das folgende Lemma.

Satz 3.9. *Die durch (3.16) gegebene Approximation $-DtN_h^+$ des kontinuierlichen Dirichlet-zu-Neumann-Operators $-DtN^+$ sei positiv im Sinne des Lemmas 3.2. Weiterhin erfülle $u^h(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ das semidiskrete Problem (3.17) und $u(\cdot, t) \in H^2(\Omega^-)$ das kontinuierliche Problem (3.9). Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} \|\dot{u} - \dot{u}^h\|_{\Omega^-} + \|\nabla(u - u^h)\|_{\Omega^-} &\leq C\|v_0 - v_0^h\|_{\Omega^-} + C\|\nabla u_0 - \nabla u_0^h\|_{\Omega^-} \\ &\quad + CTh \int_0^t \|DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u\|_{1/2, r+3} \, d\tau. \end{aligned}$$

Beweis. Um die Ausführungen übersichtlich zu halten, setzen wir für den Beweis $c(x) \equiv 1$. Zum Nachweis notieren wir zunächst für alle $v(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ das semidiskrete Problem (3.17) in der Form

$$\left(\ddot{u}^h, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u^h, \nabla v)_{\Omega^-} = (f, v)_{\Omega^-} + \left\langle DtN_h^+(\partial_t) \gamma_0^- u^h, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma}$$

sowie für alle $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ das kontinuierliche Problem (3.9)

$$(\ddot{u}, v)_{\Omega^-} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega^-} = (f, v)_{\Omega^-} + \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.18)$$

und für alle $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ das modifizierte kontinuierliche Problem

$$(\ddot{w}, v)_{\Omega^-} + (\nabla w, \nabla v)_{\Omega^-} = (f, v)_{\Omega^-} + \left\langle DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^- u, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.19)$$

mit den Anfangswerten $w(x, 0) = u_0(x)$ und $\dot{w}(x, 0) = v_0(x)$. Subtraktion des Variationsproblems (3.19) vom kontinuierlichen Problem (3.18) ergibt

$$(\ddot{w} - \ddot{u}, v)_{\Omega^-} + (\nabla(w - u), \nabla v)_{\Omega^-} = \left\langle (DtN_h^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t)) \gamma_0^- u, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.20)$$

mit Nullanfangsbedingungen.

Wir untersuchen weiter den Fehler

$$\left\| (DtN_h^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t)) \gamma_0^- u \right\|_{-1/2}.$$

Dazu weisen darauf hin, dass mit der Definition (3.16) des Operators DtN_h^+ die Differenz $\varphi - \varphi_h$ der Beziehung

$$\left\langle \eta, V(\partial_t)(\varphi - \varphi_h) \right\rangle = 0 \quad \forall \eta(\cdot, t) \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$$

genügt. Das Lemma 5.3 in [73] zeigt die Abschätzung

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{-1/2, r} \leq Ch \|\varphi\|_{1/2, r+3} = Ch \|DtN^+(\partial_t)\gamma_0^- u\|_{1/2, r+3},$$

wobei $\|\cdot\|_{\pm 1/2, r}$ die Norm des in (1.29) eingeführten Raumes $H_0^r(0, T; H^{\pm 1/2}(\Gamma))$ beschreibt. Damit und mit Hilfe der Stabilitätsaussage des Lemmas 3.5 schließen wir aus (3.20)

$$\|\dot{w} - \dot{u}\|_{\Omega^-} + \|\nabla(w - u)\|_{\Omega^-} \leq Ch \int_0^t \|DtN^+(\partial_t)\gamma_0^- u\|_{1/2, r+3} d\tau. \quad (3.21)$$

Wir betrachten nun den Fehler $e := w - u^h$. Dieser erfüllt die Gleichung

$$(\ddot{e}, v)_{\Omega^-} + (\nabla e, \nabla v)_{\Omega^-} = \left\langle DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^- e, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} + \left\langle DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^-(u - w), \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma}.$$

Wir skalieren die letzte Gleichung mit $e^{-2\tau/T}$ und testen mit der speziellen Wahl $v = \dot{e}$. Unter Zuhilfenahme der Energie (3.10) erhalten wir nach Integration beider Seiten über das Zeitintervall $[0, t]$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & e^{-2} E(t) \\ & \leq E(0) + \int_0^t e^{-2\tau/T} \left\langle DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^- e, \gamma_0^- \dot{e} \right\rangle_{\Gamma} d\tau + \int_0^t e^{-2\tau/T} \left\langle DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^-(u - w), \gamma_0^- \dot{e} \right\rangle_{\Gamma} d\tau \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung der Positivität des Operators $-DtN_h^+$ ergibt sich weiter

$$e^{-2}E(t) \leq E(0) + \int_0^t e^{-2\tau/T} \left\langle DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^-(u-w), \gamma_0^-\dot{e} \right\rangle_\Gamma d\tau.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel sowie $e^{-2\tau/T} \leq 1$ für $\tau \geq 0$ folgt

$$e^{-2}E(t) \leq E(0) + \frac{t}{2} \int_0^t \|DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^-(u-w)\|_{-1/2}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t} \|\gamma_0^-\dot{e}\|_{1/2}^2 d\tau,$$

wobei die Energie $E(0)$ durch

$$E(0) = \frac{1}{2} \|v_0 - v_0^h\|_{\Omega^-}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(u_0 - u_0^h)\|_{\Omega^-}^2$$

gegeben ist. Den Term, der $\dot{e}$ enthält, schätzen wir nach Anwendung der Spurungleichung mit Hilfe der Energie $E(t)$ in (3.10) ab. Das Gronwall-Lemma in Integralform, siehe [48], erlaubt anschließend die Abschätzung

$$E(t) \leq C \left(E(0) + \frac{t}{2} \int_0^t \|DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^-(w-u)\|_{-1/2}^2 d\tau \right). \quad (3.22)$$

Da der Dirichlet-zu-Neumann-Operator beschränkt ist, gilt mit (3.21) die Abschätzung

$$\|DtN_h^+(\partial_t)\gamma_0^-(w-u)\|_{-1/2} \leq C\|u-w\|_1 \leq Ch \int_0^t \|DtN^+(\partial_t)\gamma_0^-u\|_{1/2,r+3} d\tau.$$

Zusammen mit (3.22) folgt nun die Behauptung aus der Dreiecksungleichung

$$\|u - u^h\|_{\Omega^-} \leq \|u - w\|_{\Omega^-} + \|w - u^h\|_{\Omega^-}.$$

□

Zeitdiskretisierung mit gleichen Zeitschrittweiten

In Hinblick auf die Zeitdiskretisierung führen wir ein Gitter mit N Zeitschritten und äquidistanten Punkten $t_j = j\Delta t$ ein, wobei $\Delta t = T/N > 0$ die Zeitschrittweite ist und $j = 0, 1, \dots, N$. Die Näherungslösung an den Gitterpunkten t_j bezeichnen wir mit u_j^h .

Im Außengebiet nutzen wir das BDF2-Verfahren, ein A-stabiles Mehrschrittverfahren, als Basis der Faltungsquadraturmethode, wohingegen wir im Innengebiet das Leapfrog-Verfahren einsetzen. Dieses explizite Verfahren ist von zweiter Ordnung und approximiert die zweite Ableitung nach der Zeit durch klassische zentrale Differenzen zweiter Ordnung. Das zu (3.9) diskrete Pendant besteht nun in der Bestimmung der unbekannten Größen u_j^h und φ_j^h für $j = 0, 1, \dots, N$ aus dem System

$$\left(\frac{u_{j+1}^h - 2u_j^h + u_{j-1}^h}{c^2 \Delta t^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u_j^h, \nabla v)_{\Omega^-} = (f_j, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi_j^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \quad (3.23a)$$

$$\langle \varphi_j^h, \psi \rangle_{\Gamma} = \left\langle \left(Dt N^+ (\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_{\Gamma}. \quad (3.23b)$$

Hierbei testeten wir zum einen mit $v \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$, zum anderen mit $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$. Die Initiierung des Innenraumproblems kann mit Hilfe von Verfahren höherer Ordnung, gewöhnlich über Runge-Kutta-Verfahren, erfolgen.

Um eine Aussage hinsichtlich der Stabilität dieses diskreten Problems zu gewinnen, bedienen wir uns in Anlehnung an die Ausführungen bezüglich des kontinuierlichen Problems auch hier eines Energieargumentes. Zu diesem Zweck sei die diskrete Energie $E_{j+\frac{1}{2}}$ zum Zeitpunkt t_j , mit $j = 0, 1, \dots, N$, gemäß der Definition

$$E_{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \left\| \frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{c(x) \Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{1}{2} (\nabla u_{j+1}^h, \nabla u_j^h)_{\Omega^-} \quad (3.24)$$

gegeben. Die Nichtnegativität dieser diskreten Energie ist eng an eine CFL-Bedingung geknüpft. Detaillierte Auskunft darüber gibt Lemma 3.10. Im Beweis dieses Lemmas benötigen wir die inverse Ungleichung, die für Funktionen eines Finite-Elemente-Raums gültig ist. Demnach existiert eine Konstante C_{inv} , sodass für alle $u^h \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ die Beziehung

$$\|\nabla u^h\|_{\Omega^-} \leq \frac{C_{inv}}{h} \|u^h\|_{\Omega^-}$$

gilt, wobei die Konstante C_{inv} nicht von der Gitterweite abhängt; siehe [19].

Lemma 3.10. *Die durch (3.24) definierte diskrete Energie ist nichtnegativ, wenn die Zeitschrittweite Δt im Innengebiet Ω^- der CFL-Bedingung*

$$C_{cfl} = \frac{C_{inv} c^2 \Delta t^2}{4 h^2} < 1 \quad (3.25)$$

genügt. Dabei ist h die Raumgitterweite und $c := \sup_{x \in \Omega^-} |c(x)|$.

Beweis. Um die Aussage des Lemmas zu zeigen, halten wir zunächst die Beziehung

$$(\nabla u_{j+1}^h, \nabla u_j^h)_{\Omega^-} = \left\| \frac{\nabla u_{j+1}^h + \nabla u_j^h}{2} \right\|_{\Omega^-}^2 - \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \frac{\nabla u_{j+1}^h - \nabla u_j^h}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2$$

fest. Mit der inversen Ungleichung folgt weiter

$$\left\| \frac{\nabla u_{j+1}^h - \nabla u_j^h}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 \leq \frac{C_{inv}}{h^2} \left\| \frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2$$

und mit (3.24) schließlich

$$E_{j+\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} - \frac{C_{inv} \Delta t^2}{8h^2} \right) \left\| \frac{u_{j+1}^h - u_j^h}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{1}{8} \left\| \nabla u_{j+1}^h + \nabla u_j^h \right\|_{\Omega^-}^2.$$

Das zeigt, dass

$$\frac{C_{inv} c^2 \Delta t^2}{4 h^2} < 1$$

eine hinreichende Bedingung für die Nichtnegativität der diskreten Energie $E_{j+\frac{1}{2}}$ darstellt; vergleiche [23]. $\square$

Mit Hilfe der eingeführten Energie (3.24) schreiben wir die mit der speziellen Belegung

$$v = v_j := \frac{u_{j+1}^h - u_{j-1}^h}{2\Delta t}$$

getestete Gleichung (3.23a) in der Form

$$\frac{1}{\Delta t} (E_{j+\frac{1}{2}} - E_{j-\frac{1}{2}}) = (f_j, v_j)_{\Omega^-} + \langle \gamma_1^- u_j^h, \gamma_0^- v_j \rangle_{\Gamma}. \quad (3.26)$$

Nachdem wir die Gleichungen (3.23b) mit der speziellen Wahl $\psi = \gamma_0^- v_j$ getestet haben, summieren wir diese zusammen mit den Gleichungen (3.26) jeweils für $j = 0, 1, \dots, N$ auf. In Bezug auf die mit dem diskreten Problem (3.23) verbundene diskrete Energie ergibt sich somit die Beziehung

$$\frac{1}{\Delta t} (E_{N+\frac{1}{2}} - E_{-\frac{1}{2}}) = \sum_{j=0}^N (f_j, v_j)_{\Omega^-} + \sum_{j=0}^N \left\langle \left(DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \gamma_0^- v_j \right\rangle_{\Gamma}. \quad (3.27)$$

Wir wollen zeigen, dass

$$- \sum_{j=0}^N \left\langle \left(DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \gamma_0^- v_j \right\rangle_{\Gamma} \geq 0$$

gilt. Zum Beweis dieser Aussage werden wir uns auf das folgende Lemma stützen.

Lemma 3.11. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ und $r = 1, 2$ seien $\rho(s)$ und $\gamma(s)$ gemäß

$$\rho(s) = \sum_{j=1}^r \frac{(1 - e^{-s})^j}{j} \quad \text{und} \quad \gamma(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{2e^{-s}}$$

definiert. Dann gilt

(a)

$$(\operatorname{Im} \rho(s)) (\operatorname{Im} \gamma(s)) \geq 0$$

(b)

$$\operatorname{Re} \gamma(s) = \frac{1}{2} (e^{2\sigma} - 1) \operatorname{Re} e^{-s}.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Aussage (a). Zunächst gilt

$$\operatorname{Im} \gamma(s) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-\bar{s}} - e^{-2s-\bar{s}}}{2e^{-2\sigma}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-\bar{s}} - e^{-2\sigma} e^{-s}}{2e^{-2\sigma}} \right) = -\frac{1}{2} (e^{2\sigma} + 1) \operatorname{Im} e^{-s}.$$

Falls $r = 1$ ist, ergibt sich damit die Gleichungskette

$$(\operatorname{Im} \rho(s)) (\operatorname{Im} \gamma(s)) = -\frac{1}{2} (e^{2\sigma} + 1) \operatorname{Im} (1 - e^{-s}) \operatorname{Im} e^{-s} = \frac{1}{2} (e^{2\sigma} + 1) (\operatorname{Im} e^{-s})^2$$

und falls $r = 2$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} \rho(s)) (\operatorname{Im} \gamma(s)) &= -\frac{1}{2} (e^{2\sigma} + 1) \operatorname{Im} \left(\frac{3}{2} - 2e^{-s} + \frac{1}{2} e^{-2s} \right) \operatorname{Im} e^{-s} \\ &= -\frac{1}{2} (e^{2\sigma} + 1) \left(-2\operatorname{Im} e^{-s} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} e^{-2s} \right) \operatorname{Im} e^{-s} \\ &= -\frac{1}{2} (e^{2\sigma} + 1) (-2\operatorname{Im} e^{-s} + (\operatorname{Re} e^{-s})(\operatorname{Im} e^{-s})) \operatorname{Im} e^{-s} \\ &= (e^{2\sigma} + 1) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} e^{-s} \right) (\operatorname{Im} e^{-s})^2. \end{aligned}$$

Diese Zwischenresultate in Verbindung mit der Ungleichung $|\operatorname{Re} e^{-s}| < 1$, gültig nach Voraussetzung, zeigen die Aussage (a).

In Bezug auf die Aussage (b) gelingt mit Hilfe der Rechnung

$$\operatorname{Re} \gamma(s) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\bar{s}} - e^{-2s-\bar{s}}}{2e^{-2\sigma}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\bar{s}} - e^{-2\sigma} e^{-s}}{2e^{-2\sigma}} \right) = \frac{1}{2} (e^{2\sigma} - 1) \operatorname{Re} e^{-s}$$

direkt der Nachweis. □

Lemma 3.12. *Es sei DtN^+ die äußere Dirichlet-zu-Neumann Abbildung. Dann gilt*

$$-\sum_{n=0}^N \left\langle (DtN^+(\partial_t^{\Delta t})\psi)(t_n), \frac{\psi_{n+1} - \psi_{n-1}}{2\Delta t} \right\rangle_{\Gamma} \geq 0$$

für jede Dichte $\psi \in \mathcal{D}_h^1(\Gamma)$.

Beweis. In der Beweisführung greifen wir auch auf Ideen aus [10] zurück. Für den Beweis definieren wir zum einen

$$u := \mathcal{D}(\partial_t^{\Delta t})\psi - \mathcal{S}(\partial_t^{\Delta t})(DtN^+(\partial_t^{\Delta t})\psi),$$

sodass u die homogene Wellengleichung mit Nullanfangsbedingungen im Teilgebiet Ω^+ löst, zum anderen

$$s^{\Delta t} := \frac{\rho(e^{-s\Delta t})}{\Delta t} \text{ und } \tilde{s}^{\Delta t} := \frac{\gamma(e^{-s\Delta t})}{\Delta t}, \quad (3.28)$$

wobei $\rho(\zeta) = \sum_{j=1}^r (1 - \zeta)^j / j$ das erzeugende Polynom des r -Schritt-Verfahrens der Rückwärtsdifferenzen, $r = 1, 2$, und $\gamma(\zeta) = (1 - \zeta^2)/(2\zeta)$ das erzeugende Polynom des zentralen Differenzen-Verfahrens darstellt.

Der Argumentation des Beweises zum Lemma 3.2 folgend, zeigen wir zuerst, dass mit $s = \sigma + i\mu$ die Relation

$$-\operatorname{Re} \left\langle DtN^+(s^{\Delta t})\gamma_0^+ \widehat{u}, \tilde{s}^{\Delta t} \gamma_0^+ \widehat{u} \right\rangle_{\Gamma} \geq 0 \quad (3.29)$$

gilt, falls $\sigma = 0$. Dabei bezeichnen wir mit $\widehat{u}$ die diskrete Laplace-Transformation von u . Wir beginnen mit der Gleichungskette

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Re} \left\langle DtN^+(s^{\Delta t})\gamma_0^+ \widehat{u}, \tilde{s}^{\Delta t} \gamma_0^+ \widehat{u} \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \operatorname{Re} \left\langle \gamma_1^+ \widehat{u}, \tilde{s}^{\Delta t} \gamma_0^+ \widehat{u} \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \operatorname{Re} (\nabla \widehat{u}, \tilde{s}^{\Delta t} \nabla \widehat{u})_{\Omega^-} + \operatorname{Re} ((s^{\Delta t})^2 \widehat{u}, \tilde{s}^{\Delta t} \widehat{u})_{\Omega^-} \\ &= \left(\operatorname{Re} \overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \right) \|\nabla \widehat{u}\|_{\Omega^-}^2 + \operatorname{Re} \left((s^{\Delta t})^2 \cdot \overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \right) \|\widehat{u}\|_{\Omega^-}^2. \end{aligned}$$

Der Teil (b) des Lemmas 3.11 zeigt, dass

$$\operatorname{Re} \overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \rightarrow 0 \text{ für } \sigma \rightarrow 0.$$

Außerdem gilt

$$\operatorname{Re} \left((s^{\Delta t})^2 \cdot \overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \right) = \left((\operatorname{Re} s^{\Delta t})^2 - (\operatorname{Im} s^{\Delta t})^2 \right) \operatorname{Re} \tilde{s}^{\Delta t} + 2(\operatorname{Re} s^{\Delta t})(\operatorname{Im} s^{\Delta t})(\operatorname{Im} \tilde{s}^{\Delta t}),$$

woraus mit Lemma 3.11 sowie $\operatorname{Re} \rho(e^{-s\Delta t}) > 0$, eine Folgerung aus der Tatsache, dass ρ ein A-stabiles Diskretisierungsverfahren beschreibt, folgt, dass

$$\operatorname{Re} \left((s^{\Delta t})^2 \cdot \overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \right) \rightarrow \frac{1}{\Delta t^3} (\operatorname{Re} \rho(e^{i\mu\Delta t})) (\operatorname{Im} \rho(e^{i\mu\Delta t})) (\operatorname{Im} \gamma(e^{i\mu\Delta t})) \geq 0 \text{ für } \sigma \rightarrow 0$$

und mithin (3.29).

Darüber hinaus leiten wir mit Hilfe der Parseval-Gleichung, wobei $0 < \lambda < 1$ ist, die Beziehung

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left\langle - \sum_{j=0}^n \lambda^{n-j} \omega_{n-j}^{\Delta t} (DtN) \lambda^j \gamma_0^+ u_j, \frac{1}{2\Delta t} (\lambda^{n+1} \gamma_0^+ u_{n+1} - \lambda^{n-1} \gamma_0^+ u_{n-1}) \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle - DtN^+ \left(\frac{\rho(\lambda e^{-i\mu\Delta t})}{\Delta t} \right) \gamma_0^+ \widehat{u}, \frac{\gamma(\lambda e^{-i\mu\Delta t})}{\Delta t} \gamma_0^+ \widehat{u} \right\rangle_{\Gamma} d\mu \end{aligned}$$

ab und unter Berücksichtigung von (3.29) folgt daraus für $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\langle -DtN^+ \left(\frac{\rho(\lambda e^{-i\mu\Delta t})}{\Delta t} \right) \gamma_0^+ \widehat{u}, \frac{\gamma(\lambda e^{-i\mu\Delta t})}{\Delta t} \gamma_0^+ \widehat{u} \right\rangle_{\Gamma} d\mu \geq 0,$$

woraus wir die Gültigkeit der Aussage dieses Lemmas schließen. $\square$

Bemerkung 3.13. *Wir hielten bereits fest, dass wir nicht in der Lage sind, den Dirichlet-zu-Neumann-Operator direkt zu diskretisieren, sondern lediglich Approximationen dieses Operators, für die unter Umständen die Eigenschaft der Positivität verletzt ist. Daher ist es ratsam, bei der numerischen Umsetzung des Kopplungsverfahrens in Bezug auf die Stabilität des Algorithmus die Positivität im Einzelfall sicherzustellen; siehe Abschnitt 3.3.*

Mit dem Lemma 3.12 können wir folgende Stabilitätsaussage gewinnen.

Satz 3.14. *Die Zeitschrittweite Δt genüge der CFL-Bedingung (3.25). Es sei weiterhin u_j^h für $j = 0, 1, \dots, N$ die Lösung des diskreten Problems (3.23). Mit der diskreten Energie $E_{-1/2}$ zum Anfangszeitpunkt gilt folgende Abschätzung:*

$$\left\| \frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla u_{n+1}^h + \nabla u_n^h\|_{\Omega^-}^2 \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \sum_{j=0}^n \left(f_j, \frac{u_{j+1}^h - u_{j-1}^h}{2} \right)_{\Omega^-} \right). \quad (3.30)$$

Beweis. Bereits im Beweis zu Lemma 3.10 leiteten wir die Beziehung

$$E_{n+\frac{1}{2}} \geq (1 - C_{cfl}) \left\| \frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{1}{8} \|\nabla u_{n+1}^h + \nabla u_n^h\|_{\Omega^-}^2$$

ab. Zusätzlich erfüllt die diskrete Energie $E_{n+\frac{1}{2}}$ die Ungleichung

$$E_{n+\frac{1}{2}} \leq E_{-\frac{1}{2}} + \sum_{j=0}^n \left(f_j, \frac{u_{j+1}^h - u_{j-1}^h}{2} \right)_{\Omega^-},$$

die eine Folgerung des Lemmas 3.12 und der Energieidentität (3.27) ist. Verbindet man diese Beziehungen und nutzt man die Tatsache, dass $1 - C_{cfl} > 0$, da Δt der CFL-Bedingung genügt, ergibt sich, was zu zeigen war. $\square$

Bemerkung 3.15. *In Abwesenheit externer Kräfte ist die Schranke (3.30) nur von der Anfangsenergie $E_{-1/2}$ und der Zeitschrittweite Δt , nicht aber von der Anzahl der Zeitschritte N abhängig.*

Wir sind nun in der Lage, eine Aussage in Hinblick auf die Konvergenz des Problems (3.23) zu treffen. Dazu formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 3.16. Es sei $u(x, t)$ Lösung des kontinuierlichen Problems (3.9). Weiterhin mögen für $u(x, t)$ stetige Zeitableitungen bis zur Ordnung 4 existieren, die in $t = 0$ verschwinden. Dann gilt für $e_n := u(t_n) - u_n$, $n = 1, \dots, N$,

$$\left\| \frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla e_{n+1} + \nabla e_n\|_{\Omega^-}^2 \leq C \left(E_{-1/2} + \frac{T\Delta t}{2} \sum_{j=0}^n \|\tilde{f}_j\|_{\Omega^-}^2 \right).$$

Hierbei ist einerseits u_n die Lösung des gekoppelten zeitdiskreten Problems:
Finde $u_n \in H^1(\Omega^-)$, $n = 0, 1, \dots, N$, sodass für alle $v \in H^1(\Omega^-)$

$$\left(\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{c^2 \Delta t^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u_n, \nabla v)_{\Omega^-} = (f_n, v)_{\Omega^-} + \left\langle (DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u)_n, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma}, \quad (3.31)$$

und andererseits, für $j = 0, \dots, n$,

$$\tilde{f}_j := \frac{\Delta t^2}{24c^2} \left(u^{(4)}(\xi_+^{(j)}) + u^{(4)}(\xi_-^{(j)}) \right) + \gamma^t \left(((DtN^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t^{\Delta t})) \gamma_0^- u)(t_j) \right)$$

mit $\xi_{\pm}^{(j)}$, sodass (3.32) erfüllt ist.

Beweis. Wir betrachten das Schema (3.9) zum Zeitpunkt t_n . Mit der Taylor-Entwicklung der Funktion $u(x, t)$ um den Punkt $t = t_n$ erhalten wir die Beziehung

$$\frac{u(t_{n+1}) - 2u(t_n) + u(t_{n-1}))}{\Delta t^2} = \ddot{u}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{24} \left(u^{(4)}(\xi_+^{(n)}) + u^{(4)}(\xi_-^{(n)}) \right), \quad (3.32)$$

wobei für die Zwischenstellen $\xi_+^{(n)} \in (t_n, t_{n+1})$ und $\xi_-^{(n)} \in (t_{n-1}, t_n)$ gilt. Damit schreiben wir (3.9) in der Form

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u(t_{n+1}) - 2u(t_n) + u(t_{n-1}))}{c^2 \Delta t^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u(t_n), \nabla v)_{\Omega^-} = (f_n, v)_{\Omega^-} \\ & + \left\langle (DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u)(t_n), \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} + \left\langle ((DtN^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t^{\Delta t})) \gamma_0^- u)(t_n), \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} \\ & + \left(\frac{\Delta t^2}{24c^2} \left(u^{(4)}(\xi_+^{(n)}) + u^{(4)}(\xi_-^{(n)}) \right), v \right)_{\Omega^-}. \end{aligned}$$

Wir führen den Fehler $e_n := u_n - u(t_n)$ ein, wobei u_n die Lösung des Problems (3.31) darstellt. Dieser erfüllt dann

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1}}{c^2 \Delta t^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla e_n, \nabla v)_{\Omega^-} - \left\langle (DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) e)_n, \gamma_0^- v \right\rangle_{\Gamma} \\ & = \left(\frac{\Delta t^2}{24c^2} \left(u^{(4)}(\xi_+^{(n)}) + u^{(4)}(\xi_-^{(n)}) \right) + \gamma^t \left(((DtN^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t^{\Delta t})) \gamma_0^- u)(t_n) \right), v \right)_{\Omega^-}. \end{aligned}$$

Der Satz 3.14 erlaubt folglich, unter Verwendung von

$$\tilde{f}_n := \frac{\Delta t^2}{24c^2} \left(u^{(4)} \left(\xi_+^{(n)} \right) + u^{(4)} \left(\xi_-^{(n)} \right) \right) + \gamma^t \left(((DtN^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t^{\Delta t})) \gamma_0^- u)(t_n) \right)$$

als abkürzende Schreibweise, die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla e_{n+1} + \nabla e_n\|_{\Omega^-}^2 \\ & \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \sum_{j=0}^n \left(\tilde{f}_j, \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{2} \right)_{\Omega^-} \right) \\ & \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \frac{T\Delta t}{2} \sum_{j=0}^n \|\tilde{f}_j\|_{\Omega^-}^2 + \frac{\Delta t}{8T} \sum_{j=0}^n \left\| \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 \right). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile nutzten wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel. Weiter gilt die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 & \leq \left\| \frac{e_{j+1} - e_j}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \left\| \frac{e_j - e_{j-1}}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + 2 \max \left\{ \left\| \frac{e_{j+1} - e_j}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2, \left\| \frac{e_j - e_{j-1}}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 \right\} \\ & \leq 3 \left\| \frac{e_{j+1} - e_j}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + 3 \left\| \frac{e_j - e_{j-1}}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2, \end{aligned}$$

aus der sich

$$\sum_{j=0}^n \left\| \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 \leq 6 \sum_{j=0}^n \left\| \frac{e_{j+1} - e_j}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2$$

ergibt. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla e_{n+1} + \nabla e_n\|_{\Omega^-}^2 \\ & \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \frac{T\Delta t}{2} \sum_{j=0}^n \|\tilde{f}_j\|_{\Omega^-}^2 + \frac{\Delta t}{T} \sum_{j=0}^n \left\| \frac{e_{j+1} - e_j}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 \right) \\ & \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \frac{T\Delta t}{2} \sum_{j=0}^n \|\tilde{f}_j\|_{\Omega^-}^2 + \frac{\Delta t}{T} \sum_{j=0}^n \left\{ \left\| \frac{e_{j+1} - e_j}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla e_{j+1} + \nabla e_j\|_{\Omega^-}^2 \right\} \right). \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung schließen wir aufgrund der diskreten Version des Gronwall-Lemmas

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t} \right\|_{\Omega^-}^2 + \|\nabla e_{n+1} + \nabla e_n\|_{\Omega^-}^2 & \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \frac{T\Delta t}{2} \sum_{j=0}^n \|\tilde{f}_j\|_{\Omega^-}^2 \right) e^{\frac{n\Delta t}{T} \frac{8}{1 - C_{cfl}}} \\ & \leq \frac{8}{1 - C_{cfl}} \left(E_{-1/2} + \frac{T\Delta t}{2} \sum_{j=0}^n \|\tilde{f}_j\|_{\Omega^-}^2 \right) e^{8/(1 - C_{cfl})} \end{aligned}$$

und somit auf die nachzuweisende Abschätzung. $\square$

Bemerkung 3.17. Der Fehler $\| (DtN^+(\partial_t) - DtN^+(\partial_t^{\Delta t})) \gamma_0^- u \|_{-1/2}$ ist für Funktionen u in $H_0^{3+p}(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$, siehe (1.29), von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^p)$, wenn das BDF-Verfahren der Ordnung p , $p = 1, 2$, zur Zeitdiskretisierung genutzt wird; siehe [66, 73].

Zeitdiskretisierung mit unterschiedlichen Zeitschrittweiten

Mit dem Ziel die Zeitdiskretisierung vorzunehmen, führten wir bereits ein Gitter mit N Zeitschritten und äquidistanten Punkten $t_j = j\Delta t$ ein, wobei $j = 0, 1, \dots, N$ und $N\Delta t = T$. Im Unterschied zu dem Außenraumproblem, auf das wir die Methode der Faltungsquadratur anwenden, ein Verfahren, das unabhängig von der Wahl des Zeitschrittes stabil ist, garantiert die Zeitdiskretisierung des Innenraumproblems, da wir hier ein explizites Diskretisierungsverfahren wählen, nur Stabilität, wenn die CFL-Bedingung erfüllt und dementsprechend die Zeitschrittweite klein ist. Vor diesem Hintergrund berücksichtigen wir von nun an eine Zeitschrittweite $\Delta t_p \leq \Delta t$ im Innengebiet und nehmen vereinfachend an, dass Δt ein ganzzahliges Vielfaches von Δt_p ist, das heißt, dass $\Delta t = p\Delta t_p$ mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt. Mit dieser Wahl ist das Zeitgitter in Ω^- eine Verfeinerung des Zeitgitters in Ω^+ , sofern $p > 1$. Im weiteren Verlauf werden wir die abkürzende Schreibweise $t_{j,\ell}$ anstelle von $t_{jp+\ell} = (jp+\ell)\Delta t_p = j\Delta t + \ell\Delta t_p$, wobei $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$, und speziell für das Zeitgitter im Außenraum $t_{j,0} = t_j$ verwenden. Die Näherungslösung an den Gitterpunkten $t_{j,\ell}$ notieren wir analog mit $u_{j,\ell}^h$ und speziell $u_{j,0}^h = u_j^h$.

Die soeben diskutierte Modifikation überführt das Problem (3.23) mit $j = 0, 1, \dots, N$ sowie $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ in das durch

$$\left(\frac{u_{j,\ell+1}^h - 2u_{j,\ell}^h + u_{j,\ell-1}^h}{c^2 \Delta t_p^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u_{j,\ell}^h, \nabla v)_{\Omega^-} = (f_{j,\ell}, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi_{j,\ell}^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \quad (3.33a)$$

$$\langle \varphi_j^h, \psi \rangle_{\Gamma} = \left\langle \left(DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.33b)$$

beschriebene Problem. Hierbei testeten wir zum einen mit $v \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$, zum anderen mit $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$.

Es ist notwendig, den Dirichlet-zu-Neumann-Operator $DtN^+(\partial_t^{\Delta t})$ als auf dem Zeitgitter mit Schrittweite Δt_p operierend zu verstehen. Dazu definieren den Dirichlet-zu-Neumann-Operator

$$\left(DtN^+ \left(\partial_t^{\Delta t_p, p} \right) \psi \right) (t_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{n-j}^{\Delta t_p, p} (DtN) \psi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{[n/p]-j}^{\Delta t} (DtN) \psi_{jp}.$$

Dieser ist auf dem Feingitter mit Zeitschrittweite Δt_p definiert, greift aber lediglich auf Werte des Grobgitters mit der Zeitschrittweite Δt zurück. Die damit in Zusammenhang stehenden Gewichte $\omega_j^{\Delta t_p, p} (DtN)$ können gemäß

$$DtN^+ (\rho(\zeta^p)/(p\Delta t_p)) = DtN^+ (\rho(\zeta^p)/\Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{\Delta t_p, p} (DtN) \zeta^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{\Delta t} (DtN) \zeta^{jp}$$

erklärt werden.

Um eine Aussage hinsichtlich der Stabilität zu gewinnen, bedienen wir uns in Analogie zum bereits beleuchteten Fall $p = 1$ eines Energieargumentes. Die diskrete Energie $E_{j,\ell+\frac{1}{2}}$ zum Zeitpunkt $t_{j,\ell}$, mit $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$, sei hierbei durch

$$E_{j,\ell+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \left\| \frac{u_{j,\ell+1} - u_{j,\ell}}{c(x)\Delta t_p} \right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{1}{2} (\nabla u_{j,\ell+1}, \nabla u_{j,\ell})_{\Omega^-} \quad (3.34)$$

gegeben. Das entspricht der Definition (3.24) im Fall $\Delta t_p = \Delta t$. Das Lemma 3.10 zeigt mit Δt_p anstelle von Δt als Zeitschrittweite im Innengebiet ebenfalls die Nichtnegativität der diskreten Energie (3.34), wenn die ausgewiesene CFL-Bedingung (3.25) erfüllt wird.

Wir nutzen die in (3.34) eingeführte diskrete Energie, um die mit der speziellen Setzung

$$v = v_{j,\ell} := \frac{u_{j,\ell+1}^h - u_{j,\ell-1}^h}{2\Delta t_p}$$

getestete Gleichung (3.33a) in der Form

$$\frac{1}{\Delta t_p} (E_{j,\ell+\frac{1}{2}} - E_{j,\ell-\frac{1}{2}}) = (f_{j,\ell}, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi_{j,\ell}^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \quad (3.35)$$

zu schreiben. Die Gleichungen (3.35) addieren wir daraufhin für alle $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ zu den Gleichungen (3.33b), hier für $j = 0, 1, \dots, N$, und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t_p} (E_{N,p-\frac{1}{2}} - E_{0,-\frac{1}{2}}) + \sum_{j=0}^N \langle \varphi_j^h, \psi \rangle_{\Gamma} \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^{p-1} (f_{j,\ell}, v_{j,\ell})_{\Omega^-} + \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^{p-1} \langle \varphi_{j,\ell}^h, \gamma_0^- v_{j,\ell} \rangle_{\Gamma} + \sum_{j=0}^N \left\langle \left(Dt N^+ (\partial_t^{\Delta t_p, p}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Um eine perfekte Energiebalance sicherzustellen, ist es notwendig, dass bei der Kopplung auf dem Rand Γ keine weitere Energie hinzukommt. Aus diesem Grund sollten sich die Kopplungsterme aufheben. Die Energieidentität (3.36) zeigt, dass das durch die simultane Setzung von

$$\varphi_j^h = \varphi_{j,\ell}^h \text{ und } \psi = \sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_0^- v_{j,\ell}$$

für alle $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ gewährleistet wird. Durch diese Setzung reduziert sich die Konvergenzordnung um eins, sodass nunmehr lineare Konvergenz vorliegt. Die endgültige Formulierung des gekoppelten diskreten Problems lautet demzufolge:

Finde $u^h(t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\varphi^h(t) \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$, sodass für $j = 0, \dots, N$ und $\ell = 0, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{j,\ell+1}^h - 2u_{j,\ell}^h + u_{j,\ell-1}^h}{c^2 \Delta t_p^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u_{j,\ell}^h, \nabla v)_{\Omega^-} &= (f_{j,\ell}, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi_j^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \\ \langle \varphi_j^h, \psi \rangle_{\Gamma} &= \left\langle \left(DtN^+(\partial_t^{\Delta t_p, p}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.37)$$

für alle $v \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$ erfüllt wird. Die damit verbundene diskrete Energie genügt der Beziehung

$$\frac{1}{\Delta t_p} \left(E_{N, p-\frac{1}{2}} - E_{0, -\frac{1}{2}} \right) = \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^{p-1} (f_{j,\ell}, v_{j,\ell})_{\Omega^-} + \sum_{j=0}^N \left\langle \left(DtN^+(\partial_t^{\Delta t_p, p}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_0^- v_{j,\ell} \right\rangle_{\Gamma}. \quad (3.38)$$

Die Stabilität dieses Problems steht in enger Verbindung mit der Positivität des Operators $DtN^+(\partial_t^{\Delta t_p, p})$, die wir zunächst für den Fall, dass die Vorwärts-Euler-Methode, das heißt $\rho(\zeta) = 1 - \zeta$, die Grundlage der Faltungsquadratur bildet, untersuchen. In Anlehnung an die Ausführungen bei der Behandlung gleicher Zeitschrittweiten im Innen- und Außengebiet untersuchen wir nun

$$-\operatorname{Re} \left\langle DtN^+(\rho(\zeta^p)/\Delta t) \psi, \gamma(\zeta)/\Delta t_p \right\rangle_{\Gamma}$$

mit $\gamma(\zeta) = 1/2(\zeta^{-1} - \zeta)$ und $\zeta = e^{-s\Delta t_p}$ sowie $s = i\omega$. Eine ähnliche Schlussweise wie im Beweis zum Lemma 3.12 zeigt, dass es bei der Frage nach der Positivität des Operators $DtN^+(\partial_t^{\Delta t_p, p})$ auf das Vorzeichen von

$$\operatorname{Re} \left(\rho(e^{i\omega\Delta t})^2 \overline{\gamma(e^{i\omega\Delta t_p})} \right)$$

ankommt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\rho(e^{i\omega\Delta t})^2 \overline{\gamma(e^{i\omega\Delta t_p})} \right) &= \operatorname{Re} \left((1 - 2e^{i\omega\Delta t} + e^{2i\omega\Delta t}) (e^{i\omega\Delta t_p} - e^{-i\omega\Delta t_p}) \right) \\ &= -2 \cos(\omega\Delta t + \omega\Delta t_p) + 2 \cos(\omega\Delta t - \omega\Delta t_p) \\ &\quad + \cos(2\omega\Delta t + \omega\Delta t_p) - \cos(2\omega\Delta t - \omega\Delta t_p) \end{aligned}$$

und nach Anwenden der Additionstheoreme erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\rho(e^{i\omega\Delta t})^2 \overline{\gamma(e^{i\omega\Delta t_p})} \right) &= 2 \sin(\omega\Delta t) \sin(\omega\Delta t_p) - \sin(2\omega\Delta t) \sin(\omega\Delta t_p) \\ &= 2 \sin(\omega\Delta t) \sin(\omega\Delta t_p) (1 - \cos(\omega\Delta t)). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Falls das BDF2-Schema mit $\rho(\zeta) = 3/2 - 2\zeta + 1/2\zeta^2$ bei der Faltungsquadratur zum Einsatz kommt, gilt die Gleichheit

$$\operatorname{Re} \left(\rho(e^{i\omega\Delta t})^2 \overline{\gamma(e^{i\omega\Delta t_p})} \right) = 8 \sin(\omega\Delta t)^5 \sin(\omega\Delta t_p) (3 \cos(\omega\Delta t/2) - \cos(3\omega\Delta t/2)). \quad (3.40)$$

Sowohl der Ausdruck in (3.39) als auch der Ausdruck in (3.40) ist nichtnegativ im Bereich $|\omega| \leq \pi/\Delta t$. Darüber hinaus sind auch Intervalle vorhanden, in denen die Terme negativ werden. Das lässt vermuten, dass instabiles Verhalten auftreten kann. Diese Instabilität sollte zu vernachlässigen sein, sofern glatte Daten eingehen und der Fourier-Transformation der Daten außerhalb des Intervalls $|\omega| \leq \pi/\Delta t$ wenig Bedeutung zukommt. In Anwendungen wird ebendiese Prämisse, glatte Eingangsdaten mit hohem Frequenzgehalt, oftmals erfüllt. In den numerischen Experimenten, siehe Abschnitt 3.3, stellte sich heraus, dass unter dieser Voraussetzung instabiles Verhalten durch eine geeignet gewählte Zeitschrittweite des Grobgitters umgangen werden kann. Die linke Seite der Abbildung 3.1 zeigt das Experiment 1 aus dem Abschnitt 3.3 mit einer verdoppelten Schrittweite des Grobgitters. Es wird deutlich, dass es aufgrund dieser Änderung zu instabilem Verhalten der Lösung kommt. Die rechte Seite der Abbildung 3.1 zeigt das Experiment 1 aus dem Abschnitt 3.3 mit modifiziertem Dirichlet-Sprung. Wir wählen hier speziell $\gamma_0^+ u^{inc}(x, t) = H(t - 2)$, sodass diese Eingangsgröße unstetig ist.

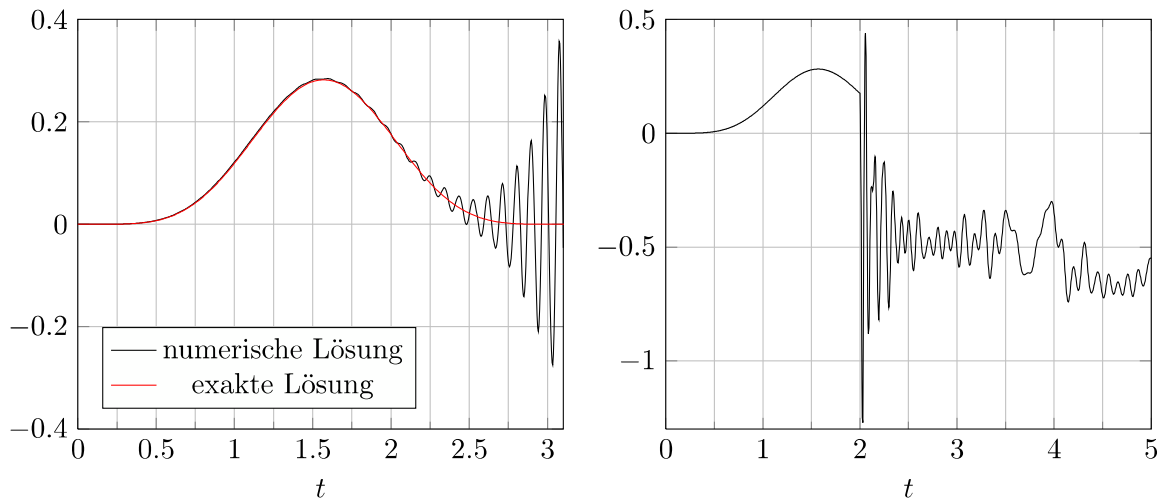


Abbildung 3.1: Experiment 1, siehe Abschnitt 3.3, mit $\Delta t_p = 0.005$ und $p = 8$ (links) und unstetigem Sprung als Eingangsgröße (rechts)

3.2.3 Modifizierte Kopplungsstrategie

Im vorangegangenen Abschnitt entwickelten wir eine Lösungsmethode, mit deren Hilfe das in Raum und Zeit diskretisierte Ausgangsproblem (3.2) näherungsweise gelöst werden kann. Wir konnten zeigen, dass die vorgestellte Kopplungsstrategie zu einem stabilen Lösungsalgorithmus führt, wenn für das Innen- und das Außenraumproblem dieselbe Zeitschrittweite gewählt wird. Falls die Zeitschrittweite im Innengebiet kleiner ist als die im Außengebiet, kann die Stabilität des Algorithmus nicht uneingeschränkt sichergestellt werden. Theoretische Ausführungen und numerische Experimente belegen, dass

diese beispielsweise bei einer unangemessenen Wahl des Zeitschritts Δt oder im Falle nicht-stetiger Eingangsdaten verletzt sein kann. In diesem Abschnitt geben wir eine im Vergleich zum vorigen Abschnitt modifizierte Kopplungsstrategie an, die auch bei der Wahl unterschiedlicher Zeitschrittweiten innerhalb des Innen- und Außengebietes stabil ist.

Wir erläutern nachfolgend die Idee der modifizierten Strategie. Dazu betrachten wir das diskrete System (3.33), das wir an dieser Stelle nochmals angeben. Es stellt sich mit $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ in der Form

$$\left(\frac{u_{j,\ell+1}^h - 2u_{j,\ell}^h + u_{j,\ell-1}^h}{c^2 \Delta t_p^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u_{j,\ell}^h, \nabla v)_{\Omega^-} = (f_{j,\ell}, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi_{j,\ell}^h, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma}$$

$$\langle \varphi_j^h, \psi \rangle_{\Gamma} = \left\langle \left(DtN^+(\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- u^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_{\Gamma}$$

dar, wobei wir zum einen mit $v \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$, zum anderen mit $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$ testeten. Wir modifizieren das Problem dahingehend, dass wir anstelle des Operators $DtN^+(\partial_t^{\Delta t})$ einen veränderten Operator $\widetilde{DtN}^+(\partial_t^{\Delta t})$ heranziehen, der durch

$$\widetilde{DtN}^+(s) := \frac{1}{s} DtN^+(s) \quad (3.41)$$

gegeben ist. Im Abschnitt 3.2.2 haben wir gesehen, dass die Stabilität an die Positivität des Dirichlet-zu-Neumann-Operators geknüpft ist. Das folgende Lemma gibt Auskunft über die Positivität des modifizierten Operators. Anschließend erarbeiten wir eine Kopplungsstrategie, bei der aufgrund dieses Lemmas auch bei unterschiedlicher Wahl der Zeitschrittweiten im Innen- und Außengebiet die Stabilität sichergestellt ist.

Lemma 3.18. *Es sei $\widetilde{DtN}^+$ die modifizierte äußere Dirichlet-zu-Neumann Abbildung aus (3.41). Dann gilt*

$$- \sum_{j=0}^N \left\langle \left(\widetilde{DtN}^+(\partial_t^{\Delta t}) \psi \right) (t_j), \psi \right\rangle_{\Gamma} \geq 0$$

für jede Dichte $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$.

Beweis. Zum Beweis bemerken wir, dass mit der Notation (3.28) die Gleichungskette

$$\left\langle \widetilde{DtN}^+(s^{\Delta t}) \psi, \psi \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle (1/s^{\Delta t}) DtN^+(s^{\Delta t}) \psi, \psi \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle DtN^+(s^{\Delta t}) \psi, s^{\Delta t} \psi \right\rangle_{\Gamma} / (|s^{\Delta t}|^2)$$

gilt und folglich

$$-\operatorname{Re} \left\langle \widetilde{DtN}^+(s^{\Delta t}) \psi, \psi \right\rangle_{\Gamma} \geq 0.$$

Der Nachweis ergibt sich somit in Analogie zum Beweis des Lemmas 3.12. $\square$

Berücksichtigen wir den in (3.41) gegebenen modifizierten Operator, so ergibt sich anstelle der Gleichung (3.33b) die Gleichung

$$\langle \varphi_j^h, \psi \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\widetilde{DtN}^+ (\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- \dot{u}^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_\Gamma. \quad (3.42)$$

Wie im vorigen Abschnitt testen wir auch hier die Gleichungen (3.33a) mit

$$v = v_{j,\ell} := \frac{u_{j,\ell+1}^h - u_{j,\ell-1}^h}{2\Delta t_p}$$

und addieren die resultierenden Gleichungen für alle $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ zu (3.42) für $j = 0, 1, \dots, N$. Wir setzen $\varphi_j^h = \varphi_{j,\ell}^h$ und erhalten mit der Energie (3.34)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(E_{N,p-\frac{1}{2}} - E_{0,-\frac{1}{2}} \right) + \sum_{j=0}^N \left\langle \varphi_j^h, \psi_j \right\rangle_\Gamma \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} (f_{j,\ell}, v_{j,\ell})_{\Omega^-} + \sum_{j=0}^N \left\langle \varphi_j^h, \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_0^- v_{j,\ell} \right\rangle_\Gamma + \sum_{j=0}^N \left\langle \left(\widetilde{DtN}^+ (\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- \tilde{u}^h \right) (t_j), \psi_j \right\rangle_\Gamma, \end{aligned} \quad (3.43)$$

wobei

$$\tilde{u}_j^h := \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} v_{j,\ell} := \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{u_{j,\ell+1}^h - u_{j,\ell-1}^h}{2\Delta t_p}$$

die Zeitableitung $\dot{u}$ in t_j approximiert. Die perfekte Energiebalance wird schließlich durch die Setzung

$$\psi_j = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_0^- v_{j,\ell} = \gamma_0^- \tilde{u}_j^h$$

für alle $j = 0, 1, \dots, N$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ gewährleistet, da sich die Kopplungsterme in (3.43) aufheben. Die endgültige Formulierung des modifizierten Problems lautet demzufolge:

Finde $u^h(t) \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\varphi^h(t) \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$, sodass für $j = 0, \dots, N$ und $\ell = 0, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{j,\ell+1}^h - 2u_{j,\ell}^h + u_{j,\ell-1}^h}{c^2 \Delta t_p^2}, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u_{j,\ell}^h, \nabla v)_{\Omega^-} = (f_{j,\ell}, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi_j^h, \gamma_0^- v \rangle_\Gamma \\ & \langle \varphi_j^h, \psi \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\widetilde{DtN}^+ (\partial_t^{\Delta t}) \gamma_0^- \tilde{u}^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_\Gamma \end{aligned} \quad (3.44)$$

für alle $v \in \mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ und $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$ erfüllt wird.

Das diskrete Schema (3.44) koppelt, im Gegensatz zum Pendant (3.33) des vorangegangenen Abschnitts, das Teilproblem im Innengebiet mit dem Teilproblem, das auf

dem Rand formuliert ist, auf eine starke Weise, sodass die algorithmische Lösung dieses diskreten Problems schwieriger ist als die des vorangegangenen Abschnitts. Wir zeigen abschließend eine Möglichkeit auf, mit deren Hilfe ein Lösungsalgorithmus zum diskreten Schema (3.44) implementiert werden kann.

Wir beginnen dazu mit der algebraischen Formulierung des diskreten Schemas (3.44), wobei wir der Vereinfachung der Ausführung wegen $c \equiv 1$ setzen und Nullanfangsbedingungen annehmen. Für die Raumdiskretisierung verwenden wir die Galerkin-Methode. Dazu führen wir sowohl eine Basis $\{\chi_j, j = 1, \dots, N_\chi\}$ von $\mathcal{P}_h^1(\Omega^-)$ als auch eine Basis $\{\mu_j, j = 1, \dots, N_\mu\}$ von $\mathcal{P}_h^0(\Gamma)$ ein. Mit dem Ansatz

$$u_{j,\ell}^h = \sum_{i=1}^{N_\chi} (\mathbf{u}_{j,\ell})_i \chi_i \quad \text{und} \quad \varphi_j^h = \sum_{i=1}^{N_\mu} (\varphi_j)_i \mu_i$$

lässt sich das diskrete Schema (3.44) wie folgt in Matrixschreibweise formulieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{u}_{j,\ell} + \frac{1}{\Delta t_p^2} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{j,\ell+1} - 2\mathbf{u}_{j,\ell} + \mathbf{u}_{j,\ell-1}) &= \mathbf{f}_{j,\ell} + \mathbf{C}^* \mathbf{B} \varphi_j, \quad \ell = 0, 1, \dots, p-1, \\ \frac{1}{2\Delta t_p} \sum_{k=0}^j \omega_{j-k} \mathbf{C} \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} \mathbf{u}_{k,\ell+1} - \mathbf{u}_{k,\ell-1} \right) &= \mathbf{B} \varphi_j. \end{aligned}$$

Hierbei stellen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{A}$ die Masse- und Steifigkeitsmatrix zum Finiten-Elemente-Gitter dar, $\mathbf{B}$ repräsentiert die Massematrix des Randgitters und $\mathbf{C}$ die diskrete Spur. Die Matrizen ω_j sind Approximationen der Faltungsgewichte $\omega_j \left(\widetilde{DtN} \right)$.

Die Lösungsstrategie, die wir nachfolgend beschreiben, greift eine Idee auf, die auf [1] zurückgeht, wo sie ähnlicher Form umgesetzt wird. Wir nehmen an, dass die Koeffizientenvektoren $\mathbf{u}_{n,0}$ und $\mathbf{u}_{j,\ell}$ für $\ell = 0, 1, \dots, p-1$ und $j = 0, 1, \dots, n-1$ bereits bekannt sind und dass die Koeffizientenvektoren φ_j für $j = 0, 1, \dots, n-1$ ebenfalls vorliegen. Mit dem Ziel die Vektoren $\mathbf{u}_{n,\ell}$ und φ_n zu berechnen, führen wir die entkoppelten unbekannten Größen $\mathbf{u}_{n,\ell}^d$ für $\ell = 1, \dots, p$ ein. Diese Unbekannten sind Lösung des Systems

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_{n,\ell}^d + \frac{1}{\Delta t_p^2} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{n,\ell+1}^d - 2\mathbf{u}_{n,\ell}^d + \mathbf{u}_{n,\ell-1}^d) = \mathbf{f}_{n,\ell}, \quad \ell = 0, 1, \dots, p-1,$$

mit den Anfangswerten $\mathbf{u}_{n,-1}^d := \mathbf{u}_{n-1,p-1}$ und $\mathbf{u}_{n,0}^d := \mathbf{u}_{n,0}$.

Wir setzen weiter $\mathbf{u}_{n,\ell} = \mathbf{u}_{n,\ell}^d + \mathbf{u}_{n,\ell}^c$ für $\ell = 1, \dots, p$. Die Größen $\mathbf{u}_{n,\ell}^c$ stellen Korrekturterme dar. Sie ergeben sich als Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{u}_{n,\ell}^c + \frac{1}{\Delta t_p^2} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{n,\ell+1}^c - 2\mathbf{u}_{n,\ell}^c + \mathbf{u}_{n,\ell-1}^c) &= \mathbf{C}^* \mathbf{B} \varphi_n, \quad \ell = 0, 1, \dots, p-1, \\ \mathbf{B} \varphi_n - \frac{1}{2\Delta t_p} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k} \mathbf{C} \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} \mathbf{u}_{k,\ell+1}^c - \mathbf{u}_{k,\ell-1}^c \right) &= \frac{1}{2\Delta t_p} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k} \mathbf{C} \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} \mathbf{u}_{k,\ell+1}^d - \mathbf{u}_{k,\ell-1}^d \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

mit den Anfangswerten $\mathbf{u}_{n,-1}^c = \mathbf{u}_{n,0}^c = 0$.

Das Lemma 3.19, das wir am Ende dieses Abschnitts beweisen, zeigt die Beziehung

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} (\mathbf{u}_{n,\ell+1}^c - \mathbf{u}_{n,\ell-1}^c) = \Delta t_p^2 T_p(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n,$$

wobei $T_p(\mathbf{X})$ mit $\mathbf{X} = \Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}$ rekursiv durch die Vorschrift

$$T_p(\mathbf{X}) = (T_{p-1}(\mathbf{X}) - T_{p-2}(\mathbf{X})) (3\mathbf{I} - \mathbf{X}) + T_{p-3}(\mathbf{X})$$

mit den Startwerten

$$T_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad T_1(\mathbf{X}) = \mathbf{I} \text{ und } T_2(\mathbf{X}) = 4\mathbf{I} - \mathbf{X}$$

definiert ist. Dieser Zusammenhang erlaubt folglich die entkoppelte Bestimmung von $\boldsymbol{\varphi}_n$ als Lösung des Systems

$$\mathbf{B}_p \boldsymbol{\varphi}_n = \frac{\Delta t_p}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{n-k} \mathbf{C} T_p(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_k + \frac{1}{2\Delta t_p} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k} \mathbf{C} \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} \mathbf{u}_{k,\ell+1}^d - \mathbf{u}_{k,\ell-1}^d \right),$$

wobei $\mathbf{B}_p$ durch $\mathbf{B} - (\Delta t_p/2) \omega_0 \mathbf{C} T_p(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B}$ gegeben ist.

Lemma 3.19. *Es seien $\mathbf{u}_{n,\ell}^c$ für $\ell = 1, \dots, p$ und $\boldsymbol{\varphi}_n$ die Lösungen der Gleichungen von (3.45). Mit $\mathbf{X} = \Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}$ gilt*

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} (\mathbf{u}_{n,\ell+1}^c - \mathbf{u}_{n,\ell-1}^c) = \Delta t_p^2 T_p(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n.$$

Die Polynome $T_p(\mathbf{X})$ sind dabei rekursiv durch die Vorschrift

$$T_p(\mathbf{X}) = (T_{p-1}(\mathbf{X}) - T_{p-2}(\mathbf{X})) (3\mathbf{I} - \mathbf{X}) + T_{p-3}(\mathbf{X})$$

mit den Startwerten

$$T_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad T_1(\mathbf{X}) = \mathbf{I} \text{ und } T_2(\mathbf{X}) = 4\mathbf{I} - \mathbf{X}$$

gegeben.

Beweis. Zunächst haben wir

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} (\mathbf{u}_{n,\ell+1}^c - \mathbf{u}_{n,\ell-1}^c) = \mathbf{u}_{n,p}^c + \mathbf{u}_{n,p-1}^c - \mathbf{u}_{n,0}^c - \mathbf{u}_{n,-1}^c = \mathbf{u}_{n,p}^c + \mathbf{u}_{n,p-1}^c.$$

Der letzte Schritt ergibt sich aufgrund der gültigen Nullanfangsbedingungen. Aus (3.45) wird zudem ersichtlich, dass nach Umformulierung

$$\mathbf{u}_{n,p}^c = 2\mathbf{u}_{n,p-1}^c - \Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}_{n,p-1}^c - \mathbf{u}_{n,p-2}^c + \Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n. \quad (3.46)$$

gilt. Folglich ergibt sich

$$\mathbf{u}_{n,p}^c + \mathbf{u}_{n,p-1}^c = 3\mathbf{u}_{n,p-1}^c - \Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u}_{n,p-1}^c - \mathbf{u}_{n,p-2}^c + \Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n.$$

Nun machen wir für $\ell = 0, 1, \dots, p$ den Ansatz

$$\mathbf{u}_{n,p}^c + \mathbf{u}_{n,p-1}^c = S_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell}^c + R_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c + \Delta t_p^2 T_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n,$$

den wir in der Folge verifizieren. Es ist zu beachten, dass mit $\ell = 1$ die Beziehungen $S_1(\mathbf{X}) = 3\mathbf{I} - \mathbf{X}$, $R_1(\mathbf{X}) = -\mathbf{I}$ und $T_1(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ gelten. Es sei nun der Ansatz für gewisse ℓ gültig. Wir drücken $\mathbf{u}_{n,p-\ell}^c$ durch (3.46) mit Hilfe von $\mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c$ und $\mathbf{u}_{n,p-\ell-2}^c$ aus und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n,p}^c + \mathbf{u}_{n,p-1}^c &= S_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell}^c + R_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c + \Delta t_p^2 T_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n \\ &= S_\ell(\mathbf{X}) (\Delta t_p^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n - \mathbf{X} \mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c + 2\mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c - \mathbf{u}_{n,p-\ell-2}^c) \\ &\quad + R_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c + \Delta t_p^2 T_\ell(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n \\ &= S_{\ell+1}(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell-1}^c + R_{\ell+1}(\mathbf{X}) \mathbf{u}_{n,p-\ell-2}^c + \Delta t_p^2 T_{\ell+1}(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n. \end{aligned}$$

Die Rechnung geht mit dem gemachten Ansatz konform, wobei wir

$$\begin{aligned} S_{\ell+1}(\mathbf{X}) &= S_\ell(\mathbf{X}) (2\mathbf{I} - \mathbf{X}) + R_\ell(\mathbf{X}) \\ R_{\ell+1}(\mathbf{X}) &= -S_\ell(\mathbf{X}) \\ T_{\ell+1}(\mathbf{X}) &= S_\ell(\mathbf{X}) + T_\ell(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{3.47}$$

setzen. Insbesondere für $\ell = 0$ ergibt sich $S_0(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$, $R_0(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ sowie $T_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$.

Der Ansatz zeigt mit $\mathbf{u}_{n,0}^c = \mathbf{u}_{n,-1}^c = \mathbf{0}$ die Beziehung

$$\mathbf{u}_{n,p}^c + \mathbf{u}_{n,p-1}^c = \Delta t_p^2 T_p(\mathbf{X}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}_n.$$

Aus obiger Rekursion (3.47) für S_ℓ , R_ℓ und T_ℓ kann die im Lemma ausgewiesene Rekursion für T_ℓ durch sukzessives Einsetzen erhalten werden. Damit ist der Beweis beendet. $\square$

Das hier vorgestellte modifizierte Verfahren stellt eine stabile Alternative zur Lösung der Transmissionsprobleme dar, insbesondere wenn unterschiedliche Zeitschrittweiten in Ω^+ und Ω^- verwendet werden. Da jedoch bei dieser Umsetzung beide Teilprobleme im Außen- und im Innenraum in einer starken Form miteinander verbunden sind, ist der Algorithmus zur Bestimmung einer Näherungslösung wesentlich aufwändiger zu implementieren. Eine alternative Herangehensweise stellt die Wahl lokaler Schrittweiten im Innengebiet dar, bei der lediglich kleine Zeitschrittweiten bei kleinen finiten Elementen genutzt werden; siehe [24, 25, 36]. Für die numerischen Experimente, die wir im Abschnitt 3.3 zeigen, implementierten wir einen Algorithmus, der die Kopplungsstrategie des Abschnitts 3.2.2 umsetzt, da wir davon ausgehen, dass die wesentlich kompliziertere Implementierung der Lösungsvariante des Abschnittes 3.2.3 aufgrund der Vorteile einer lokalen Schrittweitensteuerung nicht verhältnismäßig ist. Mit der algorithmischen Umsetzung der Ideen des Abschnitts 3.2.2 beschäftigt sich das sich anschließende Kapitel.

3.2.4 Algorithmische Umsetzung

Im Abschnitt 3.2.2 führten wir aus, wie wir das Innen- und das Außenraumproblem, (3.3) und (3.5), numerisch behandeln. Wir verwiesen darauf, dass im Innengebiet Ω^- die Finite-Elemente-Methode in Zusammenhang mit dem Leapfrog-Verfahren zur Zeitdiskretisierung zum Einsatz kommt und dass wir im Unterschied dazu im Außengebiet die Randelementmethode in Verbindung mit einer Faltungsquadraturmethode anwenden. Da das explizite Zeitdiskretisierungsverfahren, im Unterschied zu der auf einem impliziten Verfahren beruhenden Faltungsquadraturmethode, nur bedingt stabil ist, berücksichtigten wir für beide Teilprobleme verschiedene Zeitschrittweiten.

Zu Beginn des Abschnitts 3.2.2 sowie in der Bemerkung 3.13 erwähnten wir bereits, dass der Dirichlet-zu-Neumann-Operator DtN^+ keine direkte Galerkin-Diskretisierung erlaubt und höchstens Approximationen dieses Operators diskretisiert werden können. Im Rahmen der numerischen Umsetzung des Kopplungsalgorithmus (3.37) verzichteten wir aus diesem Grund auf eine direkte Verwendung des Operators DtN^+ und berücksichtigten anstelle von (3.7) die Randintegralgleichung

$$\mathcal{V}(\partial_t)\gamma_1^+u(x,t) = \left(\mathcal{K} - \frac{1}{2}\mathcal{I}\right)(\partial_t)\gamma_0^+u(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T],$$

sodass lediglich jeweils die Diskretisierung von Einfach- und Doppelschichtpotential berechnet werden muss.

Innerhalb des vorzustellenden Algorithmus erlaubt die Kopplungsstrategie des vorangegangenen Abschnittes die Behandlung der Teilprobleme (3.33a) und (3.33b), letzteres in der modifizierten Form

$$\langle \mathcal{V}(\partial_t^{\Delta t})\gamma_1^+u_j^h, \psi \rangle_\Gamma = \left\langle \left(\left(\mathcal{K} - \frac{1}{2}\mathcal{I} \right) (\partial_t^{\Delta t})\gamma_0^+u^h \right) (t_j), \psi \right\rangle_\Gamma, \quad (3.48)$$

in weitestgehend unabhängiger Art und Weise. Während der numerischen Behandlung von (3.48) haben wir dabei insbesondere Aufgaben der Form, siehe Abschnitt 1.2,

$$\sum_{j=0}^k \omega_{k-j}^{\Delta t}(\mathcal{V})\varphi_j^h = -\frac{1}{2}\gamma_0^+u_k^h + \sum_{j=0}^k \omega_{k-j}^{\Delta t}(\mathcal{K})\gamma_0^+u_j^h, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.49)$$

zu lösen, wobei die unbekannten Dichten φ_j^h in diesem Zusammenhang Approximationen der Neumann-Daten $\gamma_1^+u_j^h$ darstellen. Diesen Aufgaben werden wir mit dem im Abschnitt 1.3 vorgestellten rekursiven Algorithmus begegnen.

Wir wenden uns nun der algorithmischen Umsetzung der Kopplungsstrategie (3.37) zu. Wir nehmen an, dass die Lösung $u_{j,\ell}^h$ und die entsprechenden Neumann-Daten φ_j^h für die konkreten Zeitpunkte $t_{j,\ell}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ und $\ell = 0, 1, \dots, p-1$, sowie u_n^h und φ_n^h mit beliebigem, aber festem $n < N$, bekannt sind. Im nächsten Schritt des Algorithmus gilt es, $u_{n,\ell+1}^h$ mit $\ell = 0, \dots, p-1$ aus Gleichung (3.33a) zu bestimmen. Die

unbekannten Randdaten $\gamma_1^- u_{n,\ell}^h$ werden dabei unter Berücksichtigung der entsprechenden Transmissionsbedingung des Ausgangsproblems (3.2) und des im vorherigen Schritt ermittelten Datums φ_n^h berechnet. Dazu wählen wir wie im Abschnitt 3.2.2 $\varphi_{n,\ell}^h = \varphi_n^h$ mit $\ell = 0, 1, \dots, p-1$. Da nicht nur $u_{n,-1}^h$ sondern auch $u_{n,0}^h$ bereits vorliegen, sind wir anschließend in der Lage, nacheinander die Größen $u_{n,\ell+1}^h$ aus (3.33a) zu ermitteln.

Es folgt die Berechnung des Neumann-Datums φ_{n+1}^h mit Hilfe der diskretisierten Randintegralgleichung (3.49). Bringen wir die bereits bekannten Größen auf die rechte Seite, erhalten wir die modifizierte Gleichung

$$\omega_0^{\Delta t}(\mathcal{V}) \varphi_{n+1}^h = -\frac{1}{2} \gamma_0^+ u_{n+1}^h + \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{n+1-j}^{\Delta t}(\mathcal{K}) \gamma_0^+ u_j^h - \sum_{j=0}^n \omega_{n+1-j}^{\Delta t}(\mathcal{V}) \varphi_j^h. \quad (3.50)$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Größen $\gamma_0^+ u_j^h$ können aus der entsprechenden Übergangsbedingung des Ausgangsproblems (3.2) und den bekannten Daten $\gamma_0^- u_j^h$ ermittelt werden. Wie im Abschnitt 1.3 erläutert wurde, kann auf die explizite Berechnung der Faltungsgewichte $\omega_j^{\Delta t}(\mathcal{V})$ und $\omega_0^{\Delta t}(\mathcal{K})$ an dieser Stelle verzichtet werden. Stattdessen müssen nur die Operatoren $\mathcal{V}(s)$ und $\mathcal{K}(s)$ an einzelnen Frequenzen ausgewertet werden. Diese Arbeit wurde a priori ausgeführt, sodass wir annehmen, dass diese in jedem Schritt zur Verfügung stehen. Zur effizienten Berechnung der rechten Seite ziehen wir die skalierte schnelle Fourier-Transformation heran; siehe Abschnitt 1.3. Im Anschluss daran kann das Neumann-Datum φ_{n+1}^h ermittelt werden. Mit der Kenntnis von φ_{n+1}^h und u_{n+1}^h werden die verbleibenden Unbekannten sukzessive in der gezeigten Weise bestimmt.

Die Abbildung 3.2 zeigt den soeben skizzierten Verlauf des implementierten Kopplungsalgorithmus in einer schematischen Zusammenstellung.

3.3 Numerische Experimente

Im Abschnitt 3.2.2 diskutierten wir einen Weg zur Lösung des Transmissionsproblems (3.2), der die beiden Teilprobleme, die sich im Innen- und im Außenraum stellen, auf weitestgehend separate Weise behandelt. Insbesondere erlaubte dieser Ansatz die Wahl unterschiedlicher Zeitschrittweiten in den verschiedenen Teilgebieten. Wir stellten weiterhin einen Algorithmus vor, der im Außenraum auf ein Faltungsquadraturverfahren und im Innenraum auf ein explizites Zeitdiskretisierungsverfahren zurückgreift. Im Abschnitt 3.2.4 machten wir deutlich, wie wir bei dem vorgestellten Kopplungsalgorithmus von der effizienten rekursiven Strategie aus [8], siehe Abschnitt 1.3, zur Lösung der diskreten Faltung profitieren können.

Dieser Abschnitt widmet sich numerischen Experimenten, die die Einsatzfähigkeit der im Abschnitt 3.2.2 besprochenen Kopplungsstrategie verdeutlichen. Dazu haben wir den Algorithmus des Abschnitts 3.2.4 implementiert. Wir erwähnten bereits, dass die Gültigkeit der in Bezug auf den kontinuierlichen Dirichlet-zu-Neumann-Operator entwickelten

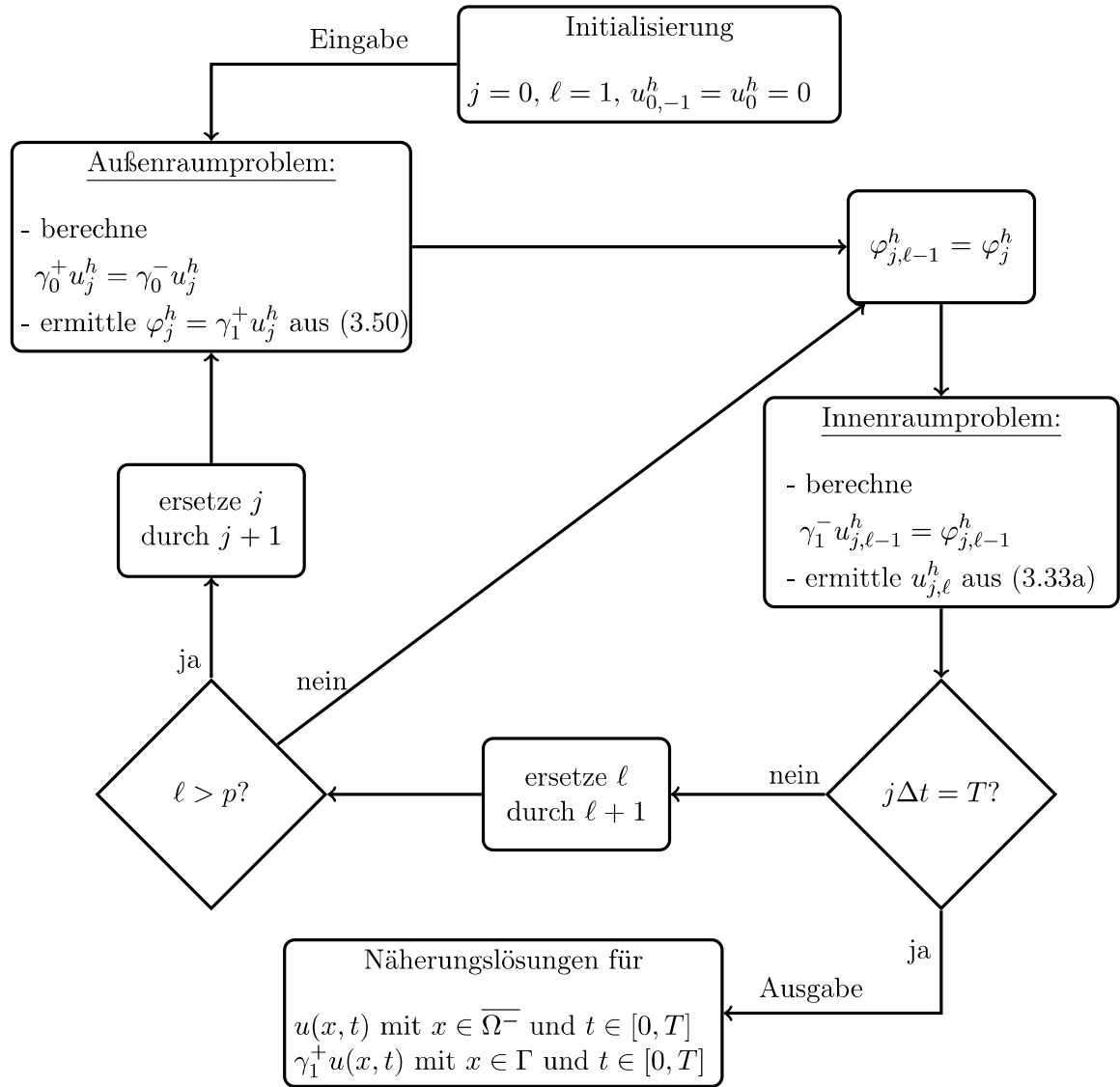


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung des Kopplungsalgorithmus

Resultate bei Einsatz des diskretisierten Dirichlet-zu-Neumann-Operators DtN_h^+ eng an dessen Positivität im Sinne des Lemmas 3.12 gebunden ist und es insbesondere bei der Verwendung unterschiedlicher Zeitschritte im Innen- und Außengebiet zu instabilem Verhalten der Näherungslösung kommen kann. Bevor wir mit den Experimenten beginnen, zeigen wir deshalb, dass für das bei den ersten zwei numerischen Tests verwendete Gebiet, mit der Notation aus dem Beweis des Lemmas 3.12, die Relation

$$q(s) := -\operatorname{Re} \left\langle DtN_h^+(s^{\Delta t})\psi, \tilde{s}^{\Delta t}\psi \right\rangle_{\Gamma} \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$$

für $\operatorname{Re} s \rightarrow 0$ erfüllt wird. Bei dem angesprochenen Innengebiet handelt es sich um die Einheitskugel, das heißt, es gilt $\Gamma = \mathbb{S}^2$. Die Ortsdiskretisierung des Innengebietes führte zu einem Gitter bestehend aus 7658 Knoten, davon 1537 auf dem Rand, und 43683 finiten Elementen sowie 3070 Randelementen. Um eine Diskretisierung DtN_h^+ des Dirichlet-zu-Neumann-Operators zu erhalten, betrachten wir die Variationsformulierung

$$\left\langle \eta, \mathcal{V}\varphi \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle \eta, \left(\mathcal{K} - \frac{1}{2}\mathcal{I} \right) \psi \right\rangle_{\Gamma} \quad \forall \eta \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma), \quad (3.51)$$

durch die der Lösungsoperator $DtN_h^+ : \mathcal{P}_h^1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$, $DtN_h^+\psi = \varphi$, definiert wird. Die Einführung der Basen $\mathcal{P}_h^1(\Gamma) = \operatorname{span}\{\psi_1, \dots, \psi_{M_1}\}$ und $\mathcal{P}_h^0(\Gamma) = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{M_0}\}$ sowie der Konstanten α_i und β_j , $i = 1, \dots, M_0$, $j = 1, \dots, M_1$ erlaubt es, jedes $\varphi \in \mathcal{P}_h^0(\Gamma)$ und jedes $\psi \in \mathcal{P}_h^1(\Gamma)$ als Kombination der Basisfunktionen, $\varphi = \sum \alpha_i \varphi_i$ und $\psi = \sum \beta_j \psi_j$, zu schreiben. Damit ergibt sich aus (3.51) mit $i = 1, 2, \dots, M_0$ das System

$$\left\langle \varphi_i, \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j \mathcal{V}\varphi_j \right\rangle = \left\langle \varphi_i, \sum_{j=1}^{M_1} \beta_j \left(\mathcal{K} - \frac{1}{2}\mathcal{I} \right) \psi_j \right\rangle,$$

das in Matrix-Vektor-Form die Gestalt

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{M} \right) \boldsymbol{\beta}$$

annimmt. In Bezug auf die Matrizen $\mathbf{V}$, $\mathbf{K}$ und $\mathbf{M}$ gilt

$$\mathbf{V}_{i,j} = \langle \varphi_i, \mathcal{V}\varphi_j \rangle_{\Gamma}, \quad \mathbf{K}_{i,j} = \langle \varphi_i, \mathcal{K}\psi_j \rangle_{\Gamma}, \quad \mathbf{M}_{i,j} = \langle \varphi_i, \psi_j \rangle_{\Gamma}.$$

Folglich schließen wir

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \left\langle DtN_h^+\psi, \tilde{s}^{\Delta t}\psi \right\rangle_{\Gamma} &= \operatorname{Re} \left\langle -\varphi, \tilde{s}^{\Delta t}\psi \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \operatorname{Re} \left(-\overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\beta} \right) = \operatorname{Re} \left(\overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \boldsymbol{\beta}^H \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{M} \right)^H \mathbf{V}^{-H} \mathbf{M} \boldsymbol{\beta} \right). \end{aligned}$$

Aus diesem Grund untersuchen wir

$$\operatorname{Re} (\boldsymbol{\beta}^H \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^H (\mathbf{T} + \mathbf{T}^H) \boldsymbol{\beta} \quad (3.52)$$

mit $\mathbf{T} := \overline{\tilde{s}^{\Delta t}} \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{M} \right)^H \mathbf{V}^{-H} \mathbf{M}$.

Das Einfachschichtpotential $\mathcal{V}_0$ zur Laplace-Gleichung ist elliptisch und beschränkt und mit dem Lemma von Lax-Milgram existiert der ebenfalls beschränkte inverse Operator $\mathcal{V}_0^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$. Daraus folgt die Elliptizität von $\mathcal{V}^{-1}$; siehe [88, Lemma 3.3]. Durch $\langle \mathcal{V}_0^{-1}\psi, \psi \rangle_\Gamma$ wird folglich eine zur Standardnorm $\|\psi\|_{1/2}^2$ äquivalente Norm definiert. Wir skalieren (3.52) mit $\langle \mathcal{V}_0^{-1}\psi, \psi \rangle_\Gamma$, um die Abhängigkeit von der Gitterweite des diskretisierten Gebietes zu umgehen. Das führt zu

$$-\frac{\operatorname{Re} \left\langle DtN_h^+ \psi, \tilde{s}^{\Delta t} \psi \right\rangle_\Gamma}{\|\psi\|_{1/2}^2} = \frac{\beta^H (\mathbf{T} + \mathbf{T}^H) \beta}{2\beta^H \mathbf{V}_0^{-1} \beta}.$$

Da wir die Frage nach der Positivität des Realteils für jede Dichte ψ stellen, lösen wir das Minimierungsproblem

$$\min_{\beta \in \mathbb{C}^{M_1}} \frac{\beta^H (\mathbf{T} + \mathbf{T}^H) \beta}{\beta^H \mathbf{V}_0^{-1} \beta}$$

beziehungsweise mit $\gamma := \mathbf{V}_0^{-1/2} \beta$

$$\min_{\gamma \in \mathbb{C}^{M_1}} \frac{\gamma^t \left(\mathbf{V}_0^{1/2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^H) \mathbf{V}_0^{1/2} \right) \gamma}{\gamma^t \gamma}. \quad (3.53)$$

In diesem Zusammenhang ist $\mathbf{V}_0^{-1/2}$ wohldefiniert, da $\mathbf{V}_0$ positiv definit ist. Das Minimierungsproblem (3.53) ist äquivalent zum Problem, den kleinsten Eigenwert von $\mathbf{V}_0^{1/2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^H) \mathbf{V}_0^{1/2}$ oder auch von $\mathbf{V}_0 (\mathbf{T} + \mathbf{T}^H)$ zu finden.

Die Abbildung 3.3 zeigt die Lösung des Minimierungsproblems (3.53) im speziellen Fall der diskretisierten Einheitskugel, die als Rechengebiet für die ersten beiden Experimente dient. Sie enthält die Resultate für Frequenzen $\operatorname{Arg}(s)$ aus dem Intervall $[0, \pi]$. Die Ergebnisse für $\operatorname{Arg}(s) \in [-\pi, 0]$ ergeben sich aus der symmetrischen Fortsetzung aufgrund der konjugierten Komplexität der Frequenzen. Man erkennt, dass hier die Realteile sämtlich positiv sind. Die kleinsten Werte ergeben sich zu null und liegen am Rand des dargestellten Bereiches.

Wir schließen die Besprechung der numerischen Experimente an, die die Einsatzfähigkeit des Kopplungsalgorithmus unterstreichen sollen. An dieser Stelle nutzen wir die Gelegenheit und weisen darauf hin, dass in allen folgenden numerischen Tests $\mathcal{H}$ -Matrix-Techniken genutzt werden, um die aus der Galerkin-Diskretisierung der Randintegraloperatoren hervorgehenden Matrizen zu speichern. Wir profitieren ebenfalls von diesen Techniken, wenn wir Matrix-Vektor-Multiplikation ausführen. Den auftretenden linearen Gleichungssystemen begegnen wir mit dem GMRES-Verfahren, wobei eine $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung des Galerkin-diskretisierten Operators $\omega_0^{\Delta t} = \mathcal{V}(\delta(0)/\Delta t)$ als Vorkonditionierer herangezogen wurde; siehe [13]. Für eine Einführung in das Gebiet der $\mathcal{H}$ -Matrizen verweisen wir auf [18] und [54], aber auch [46]. Alle Berechnungen, die auf der $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik beruhen, wurden mit Unterstützung der HLIBpro-Bibliothek ausgeführt; siehe [64] und [63].

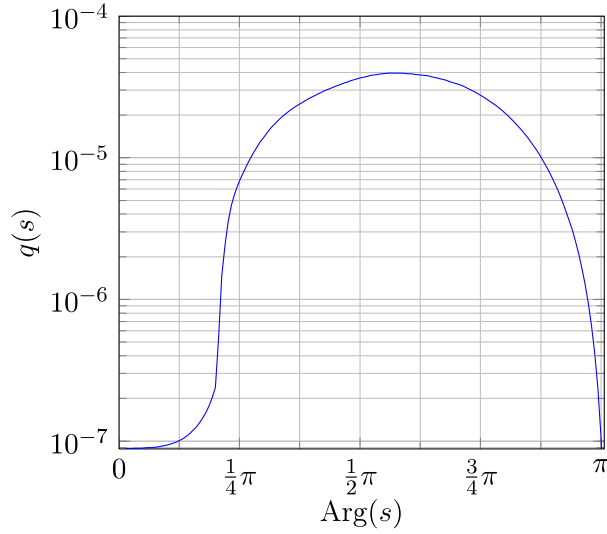


Abbildung 3.3: Untersuchung der Positivität der Dirichlet-zu-Neumann-Approximation am Beispiel der in den Experimenten 1 und 2 verwendeten Gebiete

Die numerischen Experimente formulieren wir als Streuprobleme. Solche Probleme entstehen, wenn eine einfallende Primärwelle auf ein Objekt trifft, das als Hindernis fungiert und die Welle streut. Wir setzen voraus, dass das Objekt durchstrahlbar ist. Diese Streuprobleme lassen sich ebenfalls als Transmissionsprobleme auffassen und passen demzufolge in den globalen Rahmen dieses Kapitels.

Wir interessieren uns für das durch den Prozess entstehende totale Druckfeld $u(x, t)$, das wir in das Druckfeld des Außengebietes, $u^e(x, t) := u(x, t)$, falls $x \in \Omega^+$, und das des Innengebietes, $u^i(x, t) := u(x, t)$, falls $x \in \Omega^-$, teilen. Im Außengebiet des Streuobjektes wird die einfallende Welle beim Auftreffen auf das Hindernis verändert und erzeugt ein sogenanntes gestreutes Feld u^{scat} . Dieses beschreibt den Druckunterschied zwischen dem Druckfeld bei vorhandenem Streuobjekt, u^e , und dem Druckfeld bei fehlendem Streuobjekt, u^{inc} . Beide Felder, u^{inc} und u^{scat} , überlagern sich daher zu einem Gesamtfeld $u^e(x, t) = u^{inc}(x, t) + u^{scat}(x, t)$. Die einfallende Welle ist bekannt und geht als Eingangsgröße in das Problem ein. Bei diesem Szenario geht das Ausgangsproblem (3.2) in das spezielle Streuproblem

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u^{scat}(x, t) - \Delta u^{scat}(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega^+ \times [0, T] \\
 \gamma_0^- u^i - \gamma_0^+ u^{scat} &= \gamma_0^+ u^{inc} & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\
 \gamma_1^- u^i - \gamma_1^+ u^{scat} &= \gamma_1^+ u^{inc} & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\
 \frac{1}{c(x)^2} \partial_t^2 u^i(x, t) - \Delta u^i(x, t) &= f(x, t) & (x, t) \in \Omega^- \times [0, T]
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

über. Darüber hinaus möge die einfallende Welle für $t \leq 0$ nicht in Wechselwirkung

mit dem Streuobjekt stehen, sodass wir annehmen können, dass $u^{inc}(\cdot, 0) = 0$ und $\partial_t u^{inc}(\cdot, 0) = 0$ in einem Gebiet gilt, das $\overline{\Omega^-}$ vollständig enthält. Folglich gelten die Anfangsbedingungen $u^{scat}(\cdot, 0) = \partial_t u^{scat}(\cdot, 0) = u^i(\cdot, 0) = \partial_t u^i(\cdot, 0) = 0$.

Dieses Beispielszenario entspricht nicht exakt der Formulierung des Problems, das wir für die theoretische Diskussion zugrunde gelegt haben. Aufgrund der Einführung des Dirichlet- und des Neumann-Sprungs in den Transmissionsbedingungen ergibt sich das Problem (3.54) in variationeller Form wie folgt:

Finde $u^i(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ und $\varphi(\cdot, t) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c(x)^2} \ddot{u}^i, v \right)_{\Omega^-} + (\nabla u^i, \nabla v)_{\Omega^-} &= (f, v)_{\Omega^-} + \langle \varphi, \gamma_0^- v \rangle_{\Gamma} \\ \langle \varphi, \psi \rangle_{\Gamma} &= \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^- u^i, \psi \right\rangle_{\Gamma} - \left\langle DtN^+(\partial_t) \gamma_0^+ u^{inc}, \psi \right\rangle_{\Gamma} + \langle \gamma_1^+ u^{inc}, \psi \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

mit Nullanfangsbedingungen gilt für alle $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega^-)$ und $\psi(\cdot, t) \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Im Vergleich mit (3.9) ergeben sich zusätzliche Terme, die jedoch die Stabilitätsanalyse nicht beeinflussen, sodass die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte gültig bleiben.

Die ersten beiden Testszenarien, die wir vorstellen wollen, umfassen Experimente, bei denen das Innengebiet Ω^- als Einheitskugel gegeben ist und folglich $\Gamma = \mathbb{S}^2$ gilt. Diese einfache Wahl erlaubt es, die exakte Lösung der Probleme analytisch zu bestimmen und mit der numerischen Näherungslösung zu vergleichen. Dazu wählen wir $c(x) \equiv 1$ im Innen- und im Außengebiet.

Experiment 1. Für dieses Experiment setzen wir die Eingangsdaten $f \equiv 0$ und $\gamma_0^+ u^{inc} \equiv 0$ sowie die Anfangsbedingungen $\tilde{u}(\cdot, t) \equiv 0$ und $\dot{\tilde{u}}(\cdot, t) \equiv 0$, wobei $\tilde{u}$ der Definition in (3.56) folgt. Das Ausgangsproblem (3.2) besitzt nun die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u^{scat}(x, t) - \Delta u^{scat}(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega^+ \times [0, T] \\ \gamma_0^- u^i - \gamma_0^+ u^{scat} &= 0 & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\ \gamma_1^- u^i - \gamma_1^+ u^{scat} &= \gamma_1^+ u^{inc} & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\ \partial_t^2 u^i(x, t) - \Delta u^i(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega^- \times [0, T] \end{aligned} \tag{3.55}$$

Aufgrund der Sprungeigenschaften des Einfachschichtpotentials, siehe Lemma 1.5, ergibt sich die eindeutige Lösung

$$\tilde{u} := \begin{cases} u^{scat} & \text{in } \Omega^+ \\ u^i & \text{in } \Omega^- \end{cases} \tag{3.56}$$

dieses Transmissionsproblems zu $\tilde{u} = \mathcal{S}(\partial_t) \gamma_1^+ u^{inc}$, wobei $\mathcal{S}(\partial_t)$ in (1.21) erklärt wurde.

Die sphärischen Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\hat{x})$, mit $\hat{x} = x/\|x\|$, vom Grad l und der Ordnung m sind Eigenfunktionen des Randintegraloperators $\gamma_0^- \mathcal{S}(\partial_t) = \mathcal{V}(\partial_t)$. Die Eigenwerte sind durch die inverse Laplace-Transformation von $\lambda_l(s) = -sj_l(is)h_l^{(1)}(is)$

gegeben; siehe [62, 78]. Hierbei sind j_l die sphärische Bessel-Funktion der Ordnung l und $h_l^{(1)}$ die sphärische Hankel-Funktion erster Art der Ordnung l ; siehe [3].

Die Eingangsgröße $\gamma_1^+ u^{inc}(x, t)$ sei nun separierbar, das heißt von der Gestalt, dass sie eine Darstellung der Form $\gamma_1^+ u^{inc}(x, t) = \beta^1(t) \cdot Y_l^m(\hat{x})$ besitzt. Mit dem Lösungsansatz $\gamma_0^- \tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(t) \cdot Y_l^m(\hat{x})$ sind wir in der Lage, das Problem (3.55) insofern zu reduzieren, als es lediglich zeitabhängig ist; siehe [11]. Es gilt

$$\mathcal{V}(\partial_t) \gamma_1^+ u^{inc}(x, t) = \lambda_l(\partial_t) \gamma_1^+ u^{inc}(x, t) = \gamma_0^- \tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(t) Y_l^m(\hat{x}).$$

Daraus entnehmen wir, dass

$$\lambda_l(\partial_t) \beta^1(t) = \tilde{u}(t).$$

In diesem konkreten numerischen Experiment wählen wir speziell die konstante Eigenfunktion $Y_0^0 = 1/(2\sqrt{\pi})$. Folglich erhalten wir mit der Heaviside-Funktion $H(t)$ wegen $\lambda_0 = (1 - e^{-2s})/(2s)$ den entsprechenden Eigenwert als $\mathcal{L}^{-1} \lambda_0 = 1/2 - H(t - 2)/2$. Insgesamt ergibt sich demzufolge

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2} \int_{t-2}^t \beta^1(\tau) \, d\tau.$$

Dabei setzen wir die Funktion $\beta^1(t)$ für negative Zeiten durch null fort. Diese letzte Beziehung ist aufgrund der Relation $\beta^1(t) = \lambda_0^{-1}(\partial_t) \tilde{u}(t)$ äquivalent zu

$$\beta^1(t) = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \dot{\tilde{u}}(t - 2j), \quad (3.57)$$

wobei $\dot{\tilde{u}}$ die Ableitung von $\tilde{u}(t)$ bezeichnet; siehe [81].

Für das konkrete Experiment wählen wir die Eingangsgröße $\gamma_1^+ u^{inc}(x, t)$ gemäß

$$\gamma_1^+ u^{inc}(x, t) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} \sin(t)^4 \cos(t), & 0 \leq t \leq 2 \\ \sin(t)^4 \cos(t) + \sin(t-2)^4 \cos(t-2), & 2 \leq t \leq 4 \\ \sin(t)^4 \cos(t) + \sin(t-2)^4 \cos(t-2) + \sin(t-4)^4 \cos(t-4), & 4 \leq t \leq 5. \end{cases}$$

Mit der Beziehung (3.57) besitzt die exakte Lösung auf dem Rand Γ der Einheitskugel, die hier als Hindernis dient, innerhalb des interessierenden Zeitintervalls $[0, 5]$ die Gestalt

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin^5(t), \quad x \in \Gamma.$$

Das Experiment ist so strukturiert, dass die Lösung auf Γ ortsunabhängig ist. Die Abbildung 3.4 zeigt die mit Hilfe des Kopplungsalgorithmus (3.2) bestimmte Näherungslösung. Dabei verwendeten wir eine Zeitschrittweite des Zeitgitters in Ω^- von $\Delta t_p = 0.005$ und $p = 4$. Dem Faltungsquadraturverfahren legten wir das BDF2-Verfahren zugrunde.

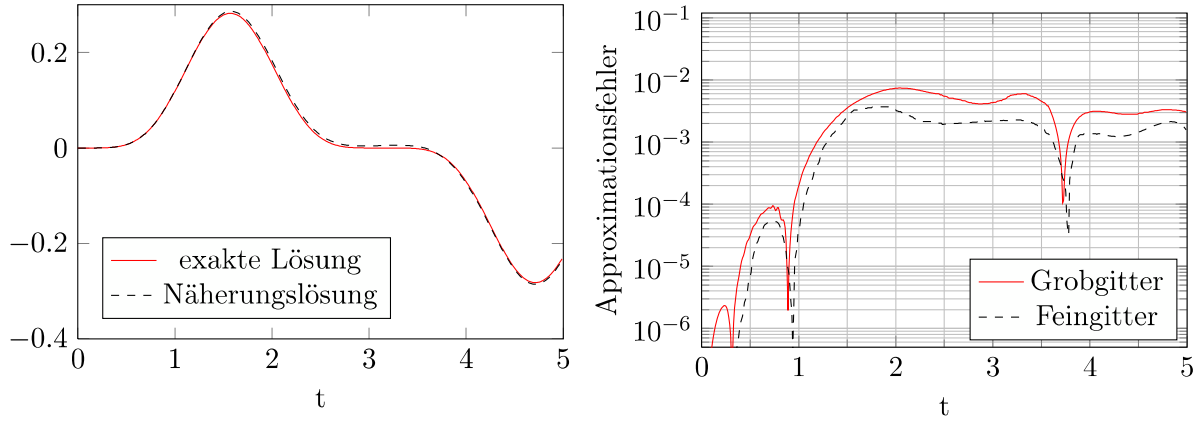


Abbildung 3.4: Erstes numerisches Experiment: Vergleich von numerischer und exakter Lösung in einem Randpunkt (links) und Approximationsfehler (rechts)

Die linke Abbildung zeigt den Vergleich der auf dem Gitter, das sich aus 43683 finiten Elementen zusammensetzt, berechneten Näherungslösung mit der exakten Lösung, die rechte Abbildung weist den entsprechenden Approximationsfehler aus. Das gleiche Experiment haben wir anschließend mit halbiertem Gitterweite und einer Zeitschrittweite von $\Delta t_p = 0.0025$ und $p = 4$ durchgeführt. Mit dieser Wahl ist das Verhältnis aus Zeitschrittweite und minimaler Elementgröße des Ortgitters in beiden Experimenten vergleichbar. Den Approximationsfehler, der mit diesem feineren Finite-Elemente-Gitter in Verbindung steht, ist ebenfalls der rechten Abbildung zu entnehmen. Auf eine Gegenüberstellung der Näherungslösung auf dem Feingitter mit der Originallösung verzichten wir an dieser Stelle, da die Visualisierung bei der verwendeten Skalierung zu keinem Erkenntnisgewinn beiträgt. Der Vergleich beider Approximationsfehler bestätigt die Konvergenzeigenschaft.

Experiment 2. Dem Experiment 1 folgend, setzen wir hier in Hinblick auf das Problem (3.2) die Eingangsdaten $f \equiv 0$ und $\gamma_1^+ u^{inc} \equiv 0$ sowie die Anfangsbedingungen $\tilde{u}(\cdot, t) \equiv 0$ und $\hat{u}(\cdot, t) \equiv 0$, wobei $\tilde{u}$ gemäß (3.59) definiert ist. Das Ausgangsproblem (3.2) besitzt nun die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u^{scat}(x, t) - \Delta u^{scat}(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega^+ \times [0, T] \\
\gamma_0^- u^i - \gamma_0^+ u^{scat} &= \gamma_0^+ u^{inc} & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\
\gamma_1^- u^i - \gamma_1^+ u^{scat} &= 0 & (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \\
\partial_t^2 u^i(x, t) - \Delta u^i(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega^- \times [0, T]
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Ist $\mathcal{D}(\partial_t)$ gemäß (1.22) erklärt, so ist die eindeutige Lösung

$$\tilde{u} := \begin{cases} u^{scat} & \text{in } \Omega^+ \\ u^i & \text{in } \Omega^- \end{cases} \tag{3.59}$$

dieses speziellen Transmissionsproblems aufgrund der Sprungrelationen des Doppelschichtpotentials, siehe Lemma 1.5, durch $\tilde{u} = -\mathcal{D}(\partial_t)\gamma_0^+ u^{inc}$ gegeben.

Die sphärischen Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\hat{x})$, mit $\hat{x} = x/\|x\|$, sind ebenfalls Eigenfunktionen des Randintegraloperators $\gamma_0^-\mathcal{D}(\partial_t) = \mathcal{K}(\partial_t) - 1/2\mathcal{I}$. Die Eigenwerte stellen sich hier, unter Berücksichtigung der bereits im Experiment 1 eingeführten Notation, als die inverse Laplace-Transformation der Funktionen $\mu_l(s) = -is^2 h_l^{(1)}(is) \cdot j_l'(is) - 1$ dar; siehe [62, 78].

Die noch zu belegende Eingangsgröße $\gamma_0^+ u^{inc}(x, t)$ sei in Bezug auf Ort und Zeit trennbar, sodass $\gamma_0^+ u^{inc}(x, t) = \beta^0(t) \cdot Y_l^m(\hat{x})$ gilt. Mit Hilfe des Ansatzes $\gamma_0^-\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(t) \cdot Y_l^m(\hat{x})$ lässt sich das Problem (3.58) als ein lediglich von der Zeitvariablen abhängiges Problem auffassen; siehe [11]. Es gilt

$$-\left(\mathcal{K}(\partial_t) - \frac{1}{2}\mathcal{I}\right)\gamma_0^+ u^{inc}(x, t) = -\mu_l(\partial_t)\gamma_0^+ u^{inc}(x, t) = \gamma_0^-\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(t)Y_l^m(\hat{x}).$$

Damit ergibt sich, dass

$$-\mu_l(\partial_t)\beta^0(t) = \tilde{u}(t).$$

Wegen $\mu_0(s) = e^{-2s}(1+s)/(2s) - (s+1)/(2s)$ besitzen die Eigenfunktionen mit der speziellen Wahl $Y_0^0 = 1/(2\sqrt{\pi})$ die Gestalt $\mathcal{L}^{-1}\mu_0 = 1/2 \cdot (H(t-2) + \delta(t-2) - \delta(t) - 1)$. Dabei verwenden wir die Heaviside-Funktion $H(t)$ und die Dirac-Delta-Distribution $\delta(t)$. Die Lösung lässt sich somit in der geschlossenen Form

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2} \int_{t-2}^t \beta^0(\tau) \, d\tau + \frac{1}{2}\beta^0(t) - \frac{1}{2}\beta^0(t-2) \quad (3.60)$$

angeben, wobei die Funktion $\beta^0(t)$ für negative Zeiten durch null fortgesetzt zu verstehen ist.

Für das konkrete Experiment wählen wir die Eingangsgröße $\gamma_0^+ u^{inc}(x, t)$ gemäß

$$\gamma_0^+ u^{inc}(x, t) = \beta^0(t)Y_0^0 = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \sin(t)^4 \cos(t).$$

Mit Beachtung von (3.60) ist die entsprechende theoretische Lösung für $x \in \Gamma$ durch

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \begin{cases} \sin(t)^5 + 5\sin(t)^4 \cos(t), & 0 \leq t \leq 2 \\ \sin(t)^5 + 5\sin(t)^4 \cos(t) - \sin(t-2)^5 - 5\sin(t-2)^4 \cos(t-2), & t \geq 2 \end{cases}$$

gegeben. Auch in diesem Test ist die Lösung zu einem festen Zeitpunkt für alle Punkte auf dem Rand Γ des Hindernisses konstant. Für dieses Experiment suchen wir die Lösung innerhalb des Zeitintervalls $[0, 5]$. Der Abbildung 3.5 kann das Ergebnis dieses zweiten Experimentes entnommen werden. Der linke Teil zeigt den Vergleich der mit Hilfe des Kopplungsalgorithmus (3.2) bestimmten Näherungslösung mit der exakten theoretischen Lösung, während der rechte Teil den Approximationsfehler darstellt. Hierbei verwendeten wir eine Zeitschrittweite des Zeitgitters in Ω^- von $\Delta t_p = 0.005$ und $p = 4$ wie bereits im

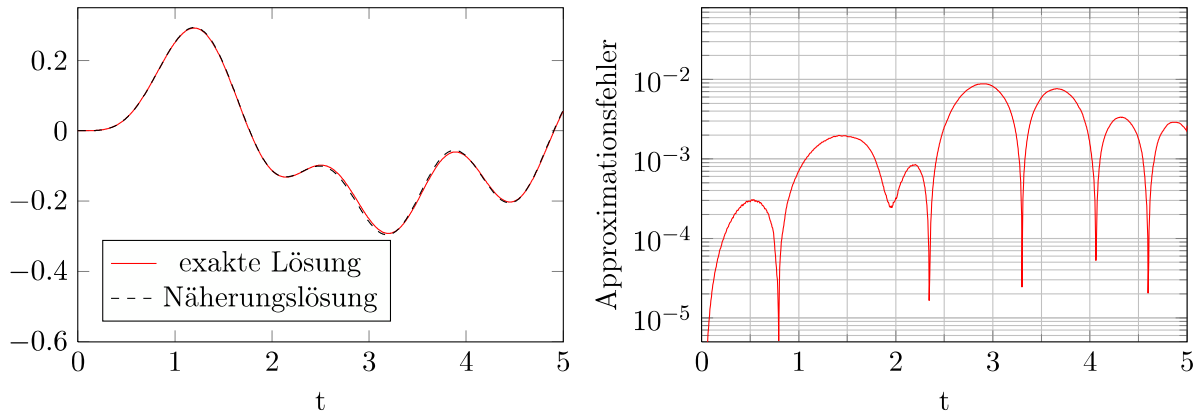


Abbildung 3.5: Zweites numerisches Experiment: Vergleich von numerischer und exakter Lösung in einem Randpunkt (links) und Approximationsfehler (rechts)

vorigen Experiment. Zusätzlich legten wir dem Faltungsquadraturverfahren das BDF2-Verfahren zugrunde.

Wir schließen diesen Abschnitt der Experimente mit dem Experiment 3.

Experiment 3. Für dieses Experiment dient ein liegender Zylinder der Länge 4 mit einem Radius der Länge 1 als Streuobjekt. Die Abbildung 3.6 zeigt die genaue Lage des Objektes. Das Gebietsinnere enthält zwei kugelförmige Löcher mit jeweils einem Radius der Länge 0.04, die auf der Ordinatenachse platziert sind. Diese Aussparung dient dazu, kleinere Elemente bei der Diskretisierung des Gebietes zu erzwingen; siehe Abbildung 3.7. Auf diese Weise entsteht ein zusätzlicher Rand, auf dem wir eine homogene Neumann-Randbedingung vorgeben.

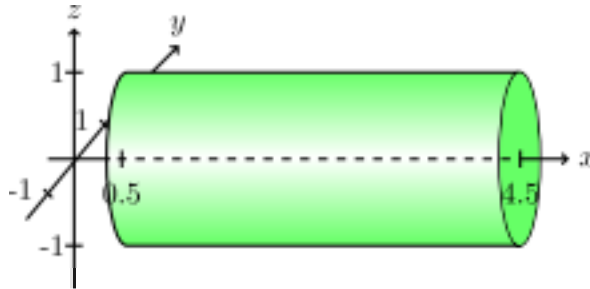


Abbildung 3.6: Darstellung der Lage des zylinderförmigen Innengebiets zu Experiment 3

Wir setzen im Ausgangsproblem (3.54) $f \equiv 0$. Die einfallende Welle u^{inc} sei in diesem Experiment eine Gauß-förmig modulierte ebene Welle der Art

$$u^{inc}(x, t) = -\cos(\omega(t - x \cdot \theta)) e^{-(t - x \cdot \theta - \gamma)^2 / \sigma^2}.$$

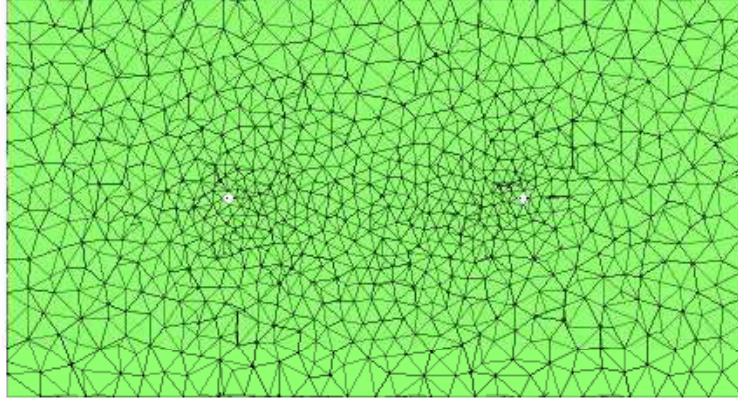


Abbildung 3.7: Gitter des entlang der $x-z$ -Ebene aufgeschnittenen Innengebietes zu Experiment 3

In Bezug auf die Ausbreitungsrichtung $\theta \in \mathbb{R}^3$ des Pulses gilt $|\theta| = 1$. Der Parameter $\omega \in \mathbb{R}$ bezeichnet die Kreisfrequenz und $\gamma \in \mathbb{R}$ beschreibt die zeitliche Verschiebung des Pulses. Die Größe $\sigma > 0$ ist ein Maß für die zeitliche Breite des Pulses. Wir wählen für dieses Experiment speziell $\omega = \pi/2$, $\theta = (1, 0, 0)^T$, $\gamma = 1/2$ und $\sigma = 1/4$. Mit dieser Wahl der Parameter ist zwar eine Wechselwirkung der einfallenden Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Streuobjekt vorhanden, diese ist jedoch so gering, dass wir die Anfangsbedingungen als gültig ansehen können.

Bevor wir das Ergebnis des Experimentes präsentieren, überzeugen wir uns von der Positivität der Dirichlet-zu-Neumann-Approximation DtN_h^+ in diesem Fall. Die Diskretisierung des zylinderförmigen Innengebietes besteht aus 56623 finiten Elementen. Auf dem Rand befinden sich 3414 Randelemente. Das Gitter besteht aus insgesamt 9795 Knoten, von denen sich 1709 Knoten auf dem Rand befinden. Die Abbildung 3.8, aus der die Lösung des Minimierungsproblems (3.53) für dieses spezielle Gebiet entnommen werden kann, bestätigt die Positivität der Dirichlet-zu-Neumann-Approximation im Sinne des Lemmas 3.12, da sich das Minimum am Rand des gezeigten Bereiches mit null einstellt.

Bei diesem numerischen Beispiel erlauben wir im Innengebiet und im Außengebiet unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Während in Ω^+ die Geschwindigkeit $c = 1$ gesetzt wird, ist sie mit $c = 2$ im Innengebiet doppelt so groß. Die Abbildung 3.9 zeigt die mit dem Kopplungsalgorithmus (3.2) erzielte Lösung des Problems. Zu sehen ist das totale Druckfeld im Innen- und Außengebiet. Der Zylinder wurde dazu entlang der $x-z$ -Ebene aufgeschnitten und gewährt somit einen Einblick in das Gebietsinnere. Die Abbildungen zeigen die Entwicklung des Druckfeldes zu ausgewählten Zeitpunkten. Es ist zu erkennen, dass sich gemäß der Konstruktion des Experimentes die Welle im Inneren des Zylinders schneller bewegt. Als Zeitschrittweite für das Zeitgitter im Innengebiet wäh-

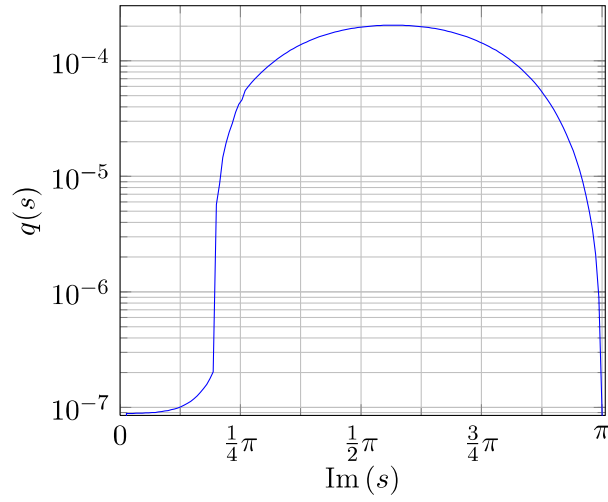


Abbildung 3.8: Untersuchung der Positivität der Dirichlet-zu-Neumann-Approximation am Beispiel des im Experiment 3 verwendeten Gebietes

len wir $\Delta t_p = 0.003$ und zudem verwenden wir $p = 4$. Das Faltungsquadraturverfahren zur Zeitdiskretisierung im Außenraum basiert auf dem BDF2-Verfahren.

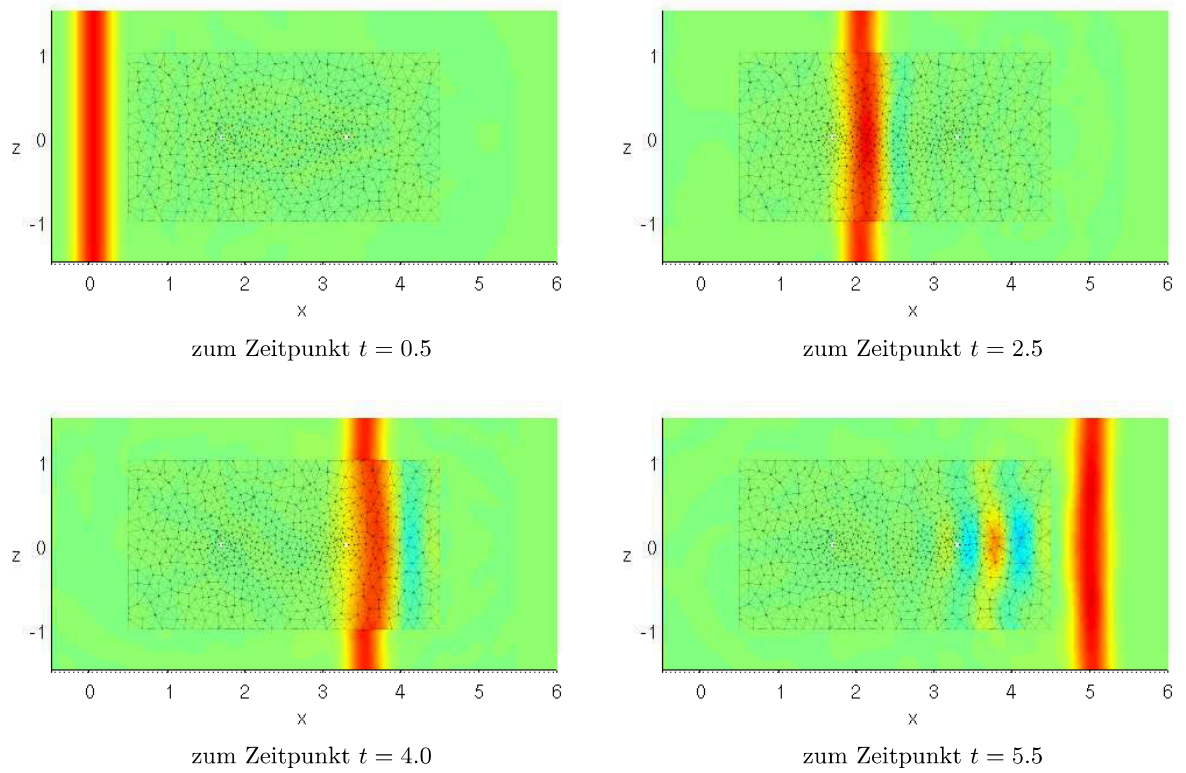


Abbildung 3.9: Drittes numerisches Experiment: Serie von Momentaufnahmen, die die Entwicklung des totalen Druckfeldes zu ausgewählten Zeitpunkten zeigen. Das zylinderförmige Streuobjekt wurde entlang der $x-z$ -Ebene aufgetrennt und erlaubt somit einen Blick in das Gebietsinnere.

Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Lösung zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen. Das Augenmerk liegt dabei auf der Behandlung von hyperbolischen Differentialgleichungen, insbesondere der Wellengleichung, die als Prototyp unserer Untersuchungen dient. Die Arbeit ist in zwei Hauptteile gegliedert.

Im ersten Hauptteil beschäftigten wir uns mit der effizienten Lösung der Wellengleichung bei Langzeitberechnungen. Von Interesse waren vor allem die Fälle, in denen das Huygens-Prinzip keine Gültigkeit besitzt und infolgedessen eine a-priori Cutoff-Strategie, wie sie in [55] vorgeschlagen wird, nicht zur Anwendung kommen kann, um die Anzahl der zu berechnenden Matrixeinträge signifikant zu reduzieren und somit die Speicheranforderungen und die Rechenzeiten zu senken. Wir konzentrierten uns einerseits auf die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen, andererseits auf die Wellengleichung in drei Raumdimensionen mit Dämpfungsterm.

Wir betrachteten zunächst nicht-sektorielle Faltungsoperatoren $K(s)$, für die $e^{sd}K(s)$ in einem größeren Sektor als die rechte komplexe Halbebene analytisch und polynomiell beschränkt ist. Für solche nicht-sektoriellen Faltungsoperatoren konnten wir im Satz 2.4 zeigen, dass die mit der Faltungsquadratur verbundenen Faltungsgewichte ab einem Index J , mit $J > (\text{diam } \Omega)/\Delta t$, die zu $K(s)$ inverse Laplace-Transformation mit der vollen Ordnung des zugrunde liegenden A-stabilen Zeitdiskretisierungsverfahrens approximieren. Diese Aussage bildet zusammen mit der Folgerung in Bezug auf Ableitungen nach Raumvariablen im Korollar 2.7 das Kernstück des ersten Hauptteils.

Diese gewonnenen Erkenntnisse nutzten wir anschließend, um eine Interpolationsstrategie zur Lösung der Wellengleichung zu entwickeln, bei der die entsprechenden Gewichtsfunktionen $\omega_j(d)$ approximiert werden. In Analogie zu der Cutoff-Strategie in [55] konnten wir auf diese Weise, das heißt nicht durch ein Cutoff, jedoch durch die Approximation der Gewichtsfunktionen, Einsparungen in Hinblick auf Speicherbedarf und Rechenzeit erreichen. Die Idee der Interpolation kombinierten wir schließlich mit dem rekursiven Algorithmus aus dem Abschnitt 1.3, siehe [8], zu einem effizienten Lösungsverfahren.

Eine Verbesserungsmöglichkeit dieses effizienten Algorithmus sprachen wir bereits an. Unser Algorithmus besitzt fast lineare Komplexität, wenn man sich auf den Berechnungsaufwand bezieht. Der Speicheraufwand dagegen ist von linearer Komplexität, die gerade für Langzeitberechnungen nicht optimal ist. Mit Hilfe des schnellen Faltungsalgorithmus, siehe [84, 85, 86], kann hier eine logarithmische Komplexität erreicht werden. Zwar ist der schnelle Faltungsalgorithmus für sektorielle Operatoren entwickelt worden, aber der Satz 2.4 erlaubt auch eine Anwendung im Rahmen der hier behandelten Probleme. Dennoch ist eine signifikante Verbesserung erst für den Fall $N \gg J$ abzusehen.

Obwohl wir uns auf die Wellengleichung einschränkten, ist zu erwarten, dass die Interpolationsstrategie auf eine breitere Klasse hyperbolischer Operatoren übertragen werden kann. Als Beispiele nennen wir an dieser Stelle Vertreter aus dem Bereich der dynamisch viskoelastischen oder elektromagnetischen Probleme. Die dort anzutreffenden Operatoren erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 2.4, siehe [12], sodass diese Vermutung nahe liegt.

Im zweiten Hauptteil dieser Arbeit verfolgten wir das Ziel, einen Finite-Elemente-Randelement-Kopplungsalgorithmus zur Lösung von hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln, mit dessen Hilfe Transmissionsprobleme behandelt werden können. Wie auch schon im ersten Hauptteil beschränkten wir uns dabei auf die Wellengleichung.

Zur Behandlung solcher Transmissionsprobleme wird das unbeschränkte Gebiet in ein beschränktes Innen- und ein unbeschränktes Außengebiet geteilt. Notfalls wird dazu ein künstlicher Rand eingeführt. Das Ziel besteht darin, alle Inhomogenitäten oder Nichtlinearitäten im Innengebiet zu konzentrieren. Die beiden Teilprobleme können dann weitestgehend separat gelöst werden. Die Schwierigkeit liegt darin, die Stabilität des Algorithmus sicherzustellen, gerade wenn für beide Teilprobleme unterschiedliche Zeitskretisierungsverfahren eingesetzt werden.

Wir entwickelten einen Kopplungsalgorithmus, der eine weitestgehend separate Behandlung der beiden Teilprobleme zulässt. Weitestgehend separat bedeutet dabei, dass wir dem Problem im Außenraum mit Hilfe der Faltungsquadratur und Randelementmethoden anders begegneten als dem Problem im Innenraum, bei dem wir ein Marching-On-In-Time-Verfahren und Finite-Elemente-Methoden berücksichtigten. Die Teilprobleme blieben über die Transmissionsbedingungen auf dem Rand miteinander verbunden. Das ermöglichte die Verwendung unterschiedlicher Zeitschrittweiten für die verschiedenen Teilprobleme. Mit Hilfe eines Energieargumentes zeigten wir die Stabilität des Algorithmus für den kontinuierlichen Fall. Daraufhin stellten wir das diskrete Problem in den Mittelpunkt und arbeiteten heraus, wie die Kopplung zu erfolgen hat. Zum Nachweis der Stabilität des Kopplungsalgorithmus bedienten wir uns erneut eines Energieargumentes. Es zeigte sich, dass – im Gegensatz zur Nutzung derselben Zeitschrittweite im Innen- und Außengebiet – bei verschiedenen Schrittweiten die Stabilität nicht uneingeschränkt gesichert werden konnte. Mit Hilfe einer leicht modifizierten Strategie konnten wir dieses Problem beheben. Wir wiesen weiter auf die Problematik bei der numerischen Umsetzung, insbesondere der mit der Diskretisierung des Dirichlet-zu-Neumann-Operators

verbundenen Schwierigkeiten, hin. Numerische Tests untermauerten die diskutierten Ideen. Bei der Ausführung der Tests wurde der rekursive Algorithmus aus Abschnitt 1.3 für das Außenraumproblem berücksichtigt, um einen effizienten Kopplungsalgorithmus zu entwickeln.

Neben einer Übertragung des Kopplungsalgorithmus auf weitere Problemklassen ist auch eine Erweiterung auf Runge-Kutta-Verfahren, etwa das Radau-IIA-Verfahren oder das Lobatto-IIIA-Verfahren, basierende Faltungsquadraturmethoden denkbar. Während die höchste Ordnung der A-stabilen linearen Mehrschrittverfahren aufgrund der Dahlquist-Schranke bei 2 liegt, siehe [32], können auf diese Weise auch höhere Konvergenzordnungen erreicht werden. Exemplarisch seien das A-stabile zweistufige Radau-IIA-Verfahren mit der Konvergenzordnung 3 und das A-stabile dreistufige Radau-IIA-Verfahren mit der Konvergenzordnung 5 genannt.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Abboud, P. Joly, J. Rodríguez, and I. Terrasse. Coupling discontinuous Galerkin methods and retarded potentials for transient wave propagation on unbounded domains. *J. Comput. Phys.*, 230(15):5877–5907, 2011.
- [2] R. Abdelkhalek, H. Calandra, O. Coulaud, J. Roman, and G. Latu. Fast Seismic Modeling and Reverse Time Migration on a GPU Cluster. *Int. J. High Perform. Comput. Simulation*, pages 36–43, 2009.
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. U. S. Government Printing Office, 10th edition, 1972.
- [4] L. Åsgeirsson. Some hints on Huygens’ principle and Hadamard’s conjecture. *Commun. Pure Appl. Math.*, 9(3):307–326, 1956.
- [5] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic Function Theory*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.
- [6] A. Bamberger and T. Ha-Duong. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d’une onde acoustique. I. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8:405–435, 1986.
- [7] E. Bängtsson, D. Noreland, and M. Berggren. Shape optimization of an acoustic horn. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 192(11-12):1533–1571, 2003.
- [8] L. Banjai. Multistep and Multistage Convolution Quadrature for the Wave Equation: Algorithms and Experiments. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32(5):2964–2994, 2010.
- [9] L. Banjai and V. Gruhne. Efficient long-time computations of time-domain boundary integrals for 2D and dissipative wave equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 235(14):4207–4220, 2011.
- [10] L. Banjai, Ch. Lubich, and F. J. Sayas. In preparation.

- [11] L. Banjai and St. Sauter. Rapid Solution of the Wave Equation in Unbounded Domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 67:227–249, 2008.
- [12] L. Banjai and M. Schanz. *Fast Boundary Element Methods in Engineering and Industrial Applications*, volume 63 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, chapter 5: Wave Propagation Problems Treated with Convolution Quadrature and BEM, pages 145–184. Springer-Verlag, 2012.
- [13] M. Bebendorf. Why finite element discretizations can be factored by triangular hierarchical matrices. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(4):1472–1494, 2007.
- [14] J. P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2):185–200, 1994.
- [15] J. Bielak and R. MacCamy. Symmetric finite element and boundary integral coupling methods for fluid-solid interaction. *Q. Appl. Math.*, 49(1):107–119, 1991.
- [16] B. Birgisson, E. Siebrits, and A. Peirce. Elastodynamic direct boundary element methods with enhanced numerical stability properties. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 46:871–888, 1999.
- [17] M. Bluck and S. Walker. Analysis of three-dimensional transient acoustic wave propagation using the boundary integral equation method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39(8):1419–1431, 1996.
- [18] St. Börm, L. Grasedyck, and W. Hackbusch. Introduction to hierarchical matrices with applications. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 27(5):405–422, 2003.
- [19] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in applied mathematics 15. Springer-Verlag, 2002.
- [20] F. Brezzi and C. Johnson. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Calcolo*, 16:189–201, 1979.
- [21] F. Brezzi, C. Johnson, and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. In *Basic problems of numerical mathematics, 4th Symp., Plzeň*, pages 103–114. Charles Univ. Prague, 1978.
- [22] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Company, 1978.
- [23] G. C. Cohen. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Springer-Verlag, 2002.
- [24] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A Conservative Space-time Mesh Refinement Method for the 1-D Wave Equation. Part I: Construction. *Numer. Math.*, 95(2):197–221, 2003.
- [25] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A Conservative Space-time Mesh Refinement Method for the 1-D Wave Equation. Part II: Analysis. *Numer. Math.*, 95(2):223–251, 2003.

- [26] D. L. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and Applied Mathematics Series. Krieger Pub. Co., 1991.
- [27] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jerrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 5(4):329–359, 1996.
- [28] M. Costabel. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements. In *Boundary Elements IX, vol. 1*, pages 411–420. Springer-Verlag, 1987.
- [29] M. Costabel. Developments in boundary element methods for time-dependent problems. In *Problems and methods in mathematical physics (Chemnitz 1993)*, pages 17–32. Teubner-Verlag, 1994.
- [30] M. Costabel. Time-dependent problems with the boundary integral equation method. *Enc. Comput. Mech.*, 1(25):703–721, 2004.
- [31] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 106(2):367–413, 1985.
- [32] G. Dahlquist. A special stability problem for linear multistep methods. *BIT*, 3:27–43, 1963.
- [33] P. J. Davies and D. B. Duncan. Averaging techniques for time-marching schemes for retarded potential integral equations. *Appl. Numer. Math.*, 23(3):291–310, 1997.
- [34] P. J. Davies and D. B. Duncan. Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(3):1167–1188, 2004.
- [35] L. Debnath and D. Bhatta. *Integral Transforms And Their Applications*. Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [36] J. Diaz and M. J. Grote. Energy Conserving Explicit Local Time Stepping for Second-Order Wave Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(3):1985–2014, 2009.
- [37] Y. Ding, A. Forestier, and T. Ha-Duong. A Galerkin Scheme for the Time Domain Integral Equation of Acoustic Scattering from a Hard Surface. *J. Acoust. Soc Am.*, 86(4):1566–1572, 1989.
- [38] S. Dodson, S. Walker, and M. Bluck. Implicitness and stability of time domain integral equation scattering analyses. *Appl. Comput. Electrom.*, 13:291–301, 1998.
- [39] F. Dupros, F. De Martin, E. Foerster, D. Komatitsch, and J. Roman. High-performance finite-element simulations of seismic wave propagation in three-dimensional nonlinear inelastic geological media. *Parallel Comput.*, 36(5-6):308–325, 2010.
- [40] A. Ergin, B. Shanker, and E. Michielssen. Fast evaluation of three-dimensional transient wave fields using diagonal translation operators. *J. Comput. Phys.*, 146(1):157–180, 1998.

- [41] A. Ergin, B. Shanker, and E. Michielssen. Fast analysis of transient acoustic wave scattering from rigid bodies using the multilevel plane wave time domain algorithm. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(3):1168–1178, 2000.
- [42] M. Filipe, A. Forestier, and T. Ha-Duong. A time-dependent acoustic scattering problem. In: *Mathematical and numerical aspects of wave propagation. Proceedings of the third international conference*, pages 140–150. SIAM, 1995.
- [43] M. B. Friedman and R. Shaw. Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section. *J. Appl. Mech.*, 29:40–46, 1962.
- [44] G. N. Gatica, G. C. Hsiao, and F. J. Sayas. Relaxing the hypotheses of Bielak-MacCamy’s BEM-FEM coupling. *Numer. Math.*, 120:465–487, 2012.
- [45] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 6th edition, 2000.
- [46] L. Grasedyck and W. Hackbusch. Construction and arithmetics of $\mathcal{H}$ -matrices. *Computing*, 70(4):295–334, 2003.
- [47] P. Grob and P. Joly. Conservative coupling between finite elements and retarded potentials. Application to vibroacoustics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(3):1127–1159, 2007.
- [48] T. H. Gronwall. Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations. *Ann. Math.*, 20(4):292–296, 1919.
- [49] P. Günther. *Huygens’ principle and hyperbolic equations*. Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1988.
- [50] T. Ha-Duong. On the transient acoustic scattering by a flat object. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 7:489–513, 1990.
- [51] T. Ha-Duong. On retarded potential boundary integral equations and their discretisation. In *Topics in computational wave propagation. Direct and inverse problems.*, Lect. Notes Comput. Sci. 31, pages 301–336. Springer-Verlag, 2003.
- [52] T. Ha-Duong, B. Ludwig, and I. Terrasse. A Galerkin BEM for transient acoustic scattering by an absorbing obstacle. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 57(13):1845–1882, 2003.
- [53] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on $\mathcal{H}$ -matrices. I: Introduction to $\mathcal{H}$ -matrices. *Computing*, 62(2):89–108, 1999.
- [54] W. Hackbusch. *Hierarchische Matrizen: Algorithmen und Analysis*. Springer-Verlag, 2009.
- [55] W. Hackbusch, W. Kress, and St. Sauter. Sparse convolution quadrature for time domain boundary integral formulations of the wave equation. *IMA J. Numer. Anal.*, 29(1):158–179, 2009.

- [56] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover Publications, 1952.
- [57] E. Hairer, Ch. Lubich, and M. Schlichte. Fast Numerical Solution of Nonlinear Volterra Convolution Equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 6(3):532–541, 1985.
- [58] H. Han. A new class of variational formulations for the coupling of finite and boundary element methods. *J. Comput. Math.*, 8(3):223–232, 1990.
- [59] G. C. Hsiao. Some recent developments on the coupling of finite element and boundary element methods. *Rend. Semin. Mat. Univ. Pol. Torino, 1991*, Special Issue:95–111, 1992.
- [60] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comput.*, 35:1063–1079, 1980.
- [61] B. G. Korenev. *Bessel Functions and their Applications*. Taylor & Francis, 1st edition, 2002.
- [62] R. Kress. Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustics and electromagnetic scattering. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 38:323–341, 1985.
- [63] R. Kriemann. HLIBpro C language interface. Technical Report 10/2008, MPI for Mathematics in the Sciences, Leipzig, 2008.
- [64] R. Kriemann. HLIBpro user manual. Technical Report 9/2008, MPI for Mathematics in the Sciences, Leipzig, 2008.
- [65] A. R. Laliena and F. J. Sayas. A distributional version of Kirchhoff's formula. *J. Math. Anal. Appl.*, 359(1):197–208, 2009.
- [66] A. R. Laliena and F. J. Sayas. Theoretical aspects of the application of convolution quadrature to scattering of acoustic waves. *Numer. Math.*, 112(4):637–678, 2009.
- [67] S. Larsson and V. Thomée. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Texts in applied mathematics 45. Springer-Verlag, 2003.
- [68] P. Lax and R. S. Phillips. *Scattering Theory*. Pure and Applied Mathematics 26. Academic Press, 1989.
- [69] M. López-Fernández and C. Palencia. On the numerical inversion of the Laplace transform of certain holomorphic mappings. *Appl. Numer. Math.*, 51(2-3):289–303, 2004.
- [70] A. V. Lozovskiy. Numerical analysis of the semidiscrete finite element method for computing the noise generated by turbulent flows. *Math. Comput. Model.*, 54(1-2):388–402, 2011.
- [71] Ch. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus I. *Numer. Math.*, 52(2):129–145, 1988.

- [72] Ch. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus II. *Numer. Math.*, 52(2):413–425, 1988.
- [73] Ch. Lubich. On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations. *Numer. Math.*, 67(3):365–389, 1994.
- [74] Ch. Lubich. Convolution quadrature revisited. *BIT*, 44(3):503–514, 2004.
- [75] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press., 2000.
- [76] K. Mitzner. Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape-retarded potential technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 42:391–397, 1967.
- [77] G. Monegato, L. Scuderi, and M. Stanić. Lubich convolution quadratures and their application to problems described by space-time BIEs. *Numer. Algorithms*, pages 1–32, 2010.
- [78] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems*. Applied Mathematical Sciences 144, Springer-Verlag, 2001.
- [79] C. Polizzotto. A consistent formulation of the BEM within elasto-plasticity. In *Advance Boundary Element Methods*, pages 315–324. Springer-Verlag, 1988.
- [80] St. Sauter and Ch. Schwab. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Teubner-Verlag, 2004.
- [81] St. Sauter and A. Veit. A Galerkin Method for Retarded Boundary Integral Equations with Smooth and Compactly Supported Temporal Basis Functions. Part II: Implementation and Reference Solutions. *submitted*, 2011.
- [82] St. Sauter and A. Veit. A Galerkin Method for Retarded Boundary Integral Equations with Smooth and Compactly Supported Temporal Basis Functions. *Numer. Math.*, 123(1):145–176, 2013.
- [83] F. J. Sayas. The Validity of Johnson-Nédélec’s BEM-FEM Coupling on Polygonal Interfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(2):3451–3463, 2009.
- [84] A. Schädle, M. López-Fernández, and Ch. Lubich. Fast and oblivious convolution quadrature. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(2):421–438, 2006.
- [85] A. Schädle, M. López-Fernández, and Ch. Lubich. Adaptive, fast and oblivious convolution in evolution equations with memory. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(2):1015–1037, 2008.
- [86] A. Schädle and Ch. Lubich. Fast convolution for nonreflecting boundary conditions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(1):161–182, 2002.
- [87] P. Silvester and M.-S. Hsieh. Finite-element solution of 2-dimensional exterior-field problems. *P. I. Electr. Eng.*, 118:1743–1748, 1971.

- [88] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme: Finite Elemente und Randelemente*. Advances in Numerical Mathematics. Teubner-Verlag, 2003.
- [89] O. Steinbach. A note on the stable one-equation coupling of finite and boundary elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(4):1521–1531, 2011.
- [90] B. Stupfel. A study of the condition number of various finite element matrices involved in the numerical solution of Maxwell’s equations. *IEEE T. Antenn. Propag.*, 52:3048–3059, 2004.
- [91] A. Tadamasa and M. Zangeneh. Numerical prediction of wind turbine noise. *Renewable Energy*, 36(7):1902–1912, 2011.
- [92] R. Udawalpola and M. Berggren. Optimization of an acoustic horn with respect to efficiency and directivity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 73(11):1571–1606, 2008.
- [93] W. L. Wendland. On asymptotic error estimates for the combined boundary and finite element method. In: *Innovative numerical methods in engineering*, pages 55–70. Springer-Verlag, 1986.
- [94] W. L. Wendland. On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM. In: *Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view*, CISM Courses Lect. 301, pages 273–333. Springer-Verlag, 1988.
- [95] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. Marriage à la mode – The best of both worlds (finite elements and boundary integrals). In: *Energy methods in finite element analysis*, pages 81–107. Wiley, Chichester.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

Leipzig, den 28. November 2012

.....
(Volker Gruhne)

Daten zum Autor

Name: Volker Gruhne
Geburtsdatum, -ort: 24. Juni 1983 in Leipzig

Wissenschaftlicher Werdegang

04/2009 - heute	Doktorand am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften Leipzig
10/2007 - 03/2009	Masterstudium „Angewandte Mathematik“ HTWK Leipzig
10/2003 - 09/2007	Diplomstudium „Wirtschaftsmathematik“ HTWK Leipzig