

Der Zirkumpolarstrom als Wellenleiter für Rossby-Wellen

H.-J. Schönfeldt

Zusammenfassung

Der Einfluß eines Scherstroms auf die Ausbreitung langer barotroper Wellen wird untersucht. Der Antarktische Zirkumpolarstrom ist als eine zonale Scherströmung zu betrachten. Wir zeigen auf einer β -Ebene, daß der Antarktische Zirkumpolarstrom für zonal sich ausbreitende Wellen als Wellenleiter wirkt. Für den linearen Fall des Scherstromes wird die analytische Lösung angegeben. Die gebundenen Wellen sind meridional modal strukturiert und bewegen sich mit einer Gruppengeschwindigkeit von rund 0.02ms^{-1} von West nach Ost (alle).

Abstract

We study the influence of a shear current on barotropic long wave propagation. The Antarctic Circumpolar Current can be considered as a sheared zonal flow. We show that on a β -plane the Antarctic Circumpolar Current acts as a waveguide for zonally propagating waves. We give the analytical solution for the linear sheared case. The trapped waves are modal structured in the meridional direction and propagate from the West to the East (all) with a group velocity of nearly 0.02ms^{-1} .

1. Einleitung

Der Antarktische Zirkumpolarstrom ist mit Transportwerten von $218 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$ die Meeresströmung mit dem größten Wassertransport auf der Erde (Dietrich u.a. 1975, S. 454 ff). Im antarktischen Wasserring ist die Strömung nicht durch kontinentale Barrieren unterbrochen, bei geringer Temperatur und Salzgehaltsschichtung herrscht annähernd Barotropie, Druckstörungen an der Meeresoberfläche können den Tiefseeboden erreichen, überwiegend zonal nach Osten gerichtete Winde erzeugen kräftige, die ganze Wassersäule erfassende Strömungen.

Harlander und Metz (1998) haben gezeigt, daß sich unter diesen Bedingungen zwischen Zirkumpolarstrom und Küste ein selektiver Wellenleiter für Rossby-Wellen ausbildet. Sie berechneten mittels WKB-Methode die Bahnen von Rossby-Wellenpaketen. Diese Rossby-Wellenpakete können sich überlagern. Das Ergebnis erinnert in Form und Aussehen an Randwellen, Schwerewellen, die am Wellenleiter Küste gefangenen sind. Randwellen lassen sich ebenso wie äquatorial gebundene Rossby-Wellen und auch Kontinentalschelfwellen durch den allgemeinen Wellenansatz

$$f(x,y,t) = f^*(y) e^{i(kx - \sigma t)} \quad (1)$$

mit σ der Kreisfrequenz und der Wellenzahl k beschreiben (Gill, 1982), wobei wir hier mit der x -Richtung die zonale Richtung bezeichnen wollen. Gleichung (1) beschreibt eine sich zonal ausbreitende Welle mit einem Amplitudenfaktor in meridionaler Richtung. Die an einem Wellenleiter gebundenen Wellen haben die Eigenschaft, daß die Lösung für große y verschwindet. Betrachtet man z.B. äquatorial gebundene Rossby-Wellen, so werden hier die Amplitudenfaktoren $f^*(y)$ durch Hermitesche Polynome, die mit der e-Funktion gefaltet werden, beschrieben (Gill, 1982, S. 438). Für an die Küste auf linear abfallendem Bodenprofil gebundene Randwellen sind die Amplitudenfaktoren $f^*(y)$ Laguerresche Polynome, die ebenfalls mit der e-Funktion gefaltet werden. Bisher existiert keine allgemeine analytische Lösung für Rossby-Wellen, die am Antarktischen Zirkumpolarstrom gebunden sind. In diesem Beitrag soll untersucht werden, ob Lösungen nach Gleichung (1) existieren, die durch eine uferparallele Strömung mit Strom-

schering an die Strömung gebunden sind. Der von Howd et al. (1992) in die Bewegungsgleichung für Schwerewellen (Randwellen) eingeführte Scherstrom läßt sich auf Rossby-Wellen erweitern, wenn man zusätzlich zu dem Scherstrom die Coriolis-Kraft berücksichtigt.

2. Theorie

2.1. Differentialgleichungen für Wasserstand und Strömung aus den Flachwasser-gleichungen

Wir wählen ein Koordinatensystem mit positiver x -Achse in Richtung Osten und der z -Achse vom Nullniveau (NN) positiv aufwärts. Die hydrodynamischen Grundgleichungen ohne Einfluß äußerer Kräfte für die Geschwindigkeitskomponenten u und v mit der Wasserspiegelauslenkung η , dem breitenabhängigen Coriolis-Parameter f und der Erdbeschleunigung g lauten:

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z + g\eta_x - fv = 0 \quad (2)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + g\eta_y + fu = 0, \quad (3)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (4)$$

wobei ein Index eine Ableitung nach der Größe bedeutet. Die Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung werden über die Wassersäule h integriert und wir erhalten (siehe Pedlosky, 1987, S. 58ff):

$$(u_x + v_y)h + uh_x + vh_y + \eta_t + u\eta_x + v\eta_y = 0 \quad (5)$$

Das Strömungsfeld ist aus einer welleninduzierten und einer mit der Uferentfernung veränderlichen Querströmung zusammengesetzt, damit hat der Strömungsvektor die Komponenten $\{u(x,y,t) + U(y), v(x,y,t), w(x,y,t)\}$. Weiter wird angenommen, daß die mit der Wellenbewegung verbundenen Geschwindigkeiten klein sind und die Wassertiefe $h = h(x,y) = h(y)$ sich in x -Richtung nicht ändert. Eine Änderung der Wassertiefe in y -Richtung wird zugelassen, auch wenn dies für Rossby-Wellen nicht notwendig ist. Dadurch können wir eine Differentialgleichung angeben, die sowohl für Rossby-Wellen als auch für Schwerewellen und hier für Kontinentalschelfwellen bis zu den Randwellen im Rahmen einer linearen Theorie gültig ist. Durch Anwendung einer Störungsrechnung und Verwendung der Terme, die linear in u, v, η sind erhalten wir das Gleichungssystem:

$$u_t + Uu_x + vU_y + g\eta_x - fv = 0 \quad (6)$$

$$v_t + Uv_x + g\eta_y + fu = 0 \quad (7)$$

$$\eta_t + \eta_x U + [hu]_x + [hv]_y = 0 \quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir durch den allgemeinen Ansatz (1), eine Welle, die sich in oder entgegen der x -Richtung ausbreitet. Setzen wir (1) in (6)-(8) unter den oben gemachten Annahmen ein, erhalten wir

$$u^*(y) = \frac{gk\eta^*(y) + i(fv^*(y) - v^*(y)U_y(y))}{\sigma - kU(y)} \quad (9)$$

$$v^*(y) = -\frac{ig\eta^*(y) + ifu^*(y)}{\sigma - kU(y)} \quad (10)$$

$$\eta^*(y) = \frac{kh(y)u^*(y) - i[h(y)v^*(y)]_y}{\sigma - kU(y)} \quad (11)$$

Dieses System von Differentialgleichungen lässt sich numerisch lösen und in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in v^* (oder auch η^* , siehe Anhang) überführen. Wir lassen den Stern und die y -Abhängigkeit bei der Bezeichnung der Größen weg und geben Zwischenergebnisse an.

Zur Ableitung der Differentialgleichung für die Nord-Südkomponente der Geschwindigkeit v benutzen wir die gleichen Bezeichnungen wie oben und folgende Abkürzungen:

$$p = \sigma - kU, \quad c^2 = gh, \quad a = p^2 - c^2k^2, \quad d = f - U_y \quad (12)$$

Aus Gl. (9) u. (11) erhalten wir für $u^*(y)$ mit $h = \text{const.}$ (im Anhang wird eine y -Abhängigkeit für h zugelassen), wobei wir der Einfachheit halber wieder den Stern weglassen:

$$u = \frac{c^2k^2u - ic^2kv_y + ipfv - ipU_yv}{p^2} = \frac{-ic^2kv_y + ipdv}{a} \quad (13)$$

und aus der Ableitung nach y der Gl. (11)

$$\eta_y = kh \left[\frac{-ic^2kv_y + ipdv}{pa} \right]_y - ih \left[\frac{v_y}{p} \right]_y \quad (14)$$

Aus (10), (13) und (14) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} v &= -\frac{c^4k^2}{p} \left[\frac{v_y}{pa} \right]_y + \frac{c^2k}{p} \left[\frac{dv}{a} \right]_y + \left(\frac{fd}{a} \right) v \\ &\quad - \frac{c^2}{p} \left[\frac{v_y}{p} \right]_y - \frac{c^2kf}{pa} v_y \\ &= -\frac{c^2}{a} v_{yy} - \frac{c^2}{a} \frac{2p}{a} kU_y v_y + \frac{c^2}{a} \left(\frac{2k^2}{a} dU_y + \frac{fd}{c^2} + \frac{k}{p} d_y \right) v \end{aligned} \quad (15)$$

und nach Umformung

$$v_{yy} + \frac{2p}{a} kU_y v_y + \left(\frac{a}{c^2} - \frac{fd}{c^2} - \frac{k}{p} d_y - \frac{2k^2}{a} dU_y \right) v = 0 \quad (16)$$

Im Fall des stromlosen Grundzustandes ($U=0$) können wir Gl. (16) wegen $p = \sigma$, $f = d$ und $a = \sigma^2 - c^2k^2$ umschreiben zu

$$v_{yy} + \left(\frac{\sigma^2}{c^2} - k^2 - \frac{f^2}{c^2} - \frac{k}{\sigma} f_y \right) v = 0 \quad (17)$$

die bekannte Differentialgleichung für am Äquator gebundene Rossby-Wellen (equatorially trapped waves, Gill, 1982, S. 438).

Die Amplitudenformfunktion der Wasserstandsauslenkung $\eta^*(y)$ erhalten wir auf analogem Weg (siehe Anhang). Wir führen in Analogie zu der Theorie der Randwellen im Scherstrom (Howd et al., 1992) eine effektive Wassertiefe h' ein:

$$h'(y) = \frac{h(y)}{p^2 - fd} = \frac{h(y)}{(\sigma - kU(y))^2 - f^2 + fU_y(y)} \quad (18)$$

Aus dem System Gl. (9)-(11) wird dann eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in η , wobei wir wieder den * weglassen.

$$g[h' \eta_y]_y + (1 - gk^2 h' + \frac{gk}{(\sigma - kU)} [h' f]_y) \eta = 0 \quad (19)$$

Die Ableitungen von f und h' nach y sind bei gegebenem Grundstrom U bekannt. Gleichungen (16) und (19) lassen sich mit einem Runge-Kutta Verfahren numerisch lösen. Randbedingungen für gebundene Wellen, deren Amplituden für große y gegen Null gehen (trapped waves), sind allgemein:

$$\eta(\infty) = 0; \quad u(\infty) = 0; \quad v(\infty) = 0; \quad (20)$$

Die Randbedingungen an Küsten ergeben sich aus der Forderung, daß die uferseinkrechte Komponente der Strömung verschwindet, $v(0) = 0$. Der Wasserstand kann mit einem beliebigen Wert als Integrationskonstante vorgegeben werden, z.B. $\eta(0) = 1$. Aus Gl. (9)-(11) erhält man dann für $y=0$ die abgeleiteten Randbedingungen für die Amplitudenformfunktionen:

$$v(0) = 0, \quad \rightarrow \quad \eta_y(0) = \eta \frac{f}{U - \frac{\sigma}{k}} \quad \text{bzw.} \quad v_y = \eta \frac{gk^2 - (\sigma - kU)^2}{\sigma - kU}; \quad (21)$$

Für $U=0$ geht Gl. (19) in die bekannte Differentialgleichung für Kontinentalschelfwellen über, Schwerewellen, die in den Auftriebsgebieten an den Westküsten der Kontinente eine wichtige Rolle spielen (LeBlond and Mysak, 1978, S. 220 ff). Für kleine Wellenlängen ist der Coriolis-Parameter f zu vernachlässigen. Ohne Scherströmung U wird aus Gl. (19) die bekannte Differentialgleichung für Randwellen (LeBlond and Mysak, 1978, S. 225 ff), mit Scherströmung U (in diesem Fall ist U der uferparallele Brandungsstrom) erhält man die Differentialgleichung für Randwellen im Brandungsstrom (Howd et al., 1992). Randwellen sind uferparallel laufende Schwerewellen der Brandungszone, die an Sandbänke und/oder an dem Brandungsstrom gebunden sind. Der in uferparalleler Richtung setzende Brandungsstrom übernimmt die Rolle des Scherstroms in (16) bzw. (19) und wirkt als Wellenleiter für Randwellen (Schönfeldt, 1991, 1994, 1995).

Es sei noch bemerkt, daß man im Runge-Kutta Verfahren den sich aus der Kugelgeometrie ergebenden Coriolis-Parameter in den Gl. (16) und (19) verwenden kann, ohne sich auf β oder δ -Ebene festzulegen.

$$f = 2\Omega \sin\phi \quad (22)$$

In Gleichung (22) bedeuten Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde und ϕ die geographische Breite.

Gl. (16) und (19) sind auch für ein spiegelsymmetrisches Problem (Äquator) anwendbar. Hier sind die Randbedingungen für $y=0$ (Äquator):

$$a) \quad v(0) = 0 \quad b) \quad v(0) = v_0; \quad (23)$$

Die abgeleiteten Randbedingungen erhält man wiederum aus Gl. (9)-(11). Wir erhalten die bekannten äquatorialen Rossby-Wellen und Rossby-Schwerewellen (mixed planetary-gravity wave, Gill, 1982, S. 438). Die theoretischen Lösungen von (17) sind für die Amplitudenformfunktionen die Hermiteschen Polynome H_n , die Randbedingung a) führt zu den ungeraden n und b) zu den geraden.

2.2. Analytische Lösung für quasi stationäre Wellen

Um am Antarktischen Zirkumpolarstrom gebundene Wellen zu finden, wollen wir Gl. (16) etwas näher untersuchen. Aus Analogiegründen zu den äquatorialen Rossby-Wellen beschränken wir uns auf eine β -Ebene, aber mit $f=f_0+\beta y$, wobei $y \leq 4000 \text{ km}$ sein soll. Wir suchen Lösungen in der Nähe von $\sigma=0$ ($\sigma \sim 10^{-8}$), Wellenzahlen kleiner 10^{-6} m^{-1} sollen nicht interessieren. Für den Scherstrom benutzen wir einen linearen Ansatz $U=U_0+U_y y$. Die Strömung soll innerhalb 1000 km auf 1m/s steigen, $U_y \sim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Mit $h=4000 \text{ m}$ wird $c^2 \sim 40000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Es ist dann möglich, einige Terme in (16) zu vernachlässigen. Folgende Beziehungen lassen sich aus den obigen Beschränkungen ableiten:

$$\begin{aligned} |p| < k, \quad a \sim c^2 k^2, \quad \frac{a}{c^2} \sim k^2, \quad 0 \leq \frac{2p}{a} k U_y < 10^{-22}, \\ \frac{f^2}{c^2} \sim 10^{-13}, \quad 2 \frac{k^2}{a} f U_y \sim 10^{-14}, \quad \infty \geq \frac{k}{p} f_y > 10^{-11} \end{aligned} \quad (24)$$

Mit (24) wird (16) näherungsweise mit einem Fehler kleiner 1%:

$$v_{yy} - \left(k^2 + \frac{1}{\frac{\sigma}{k} - U_0 - y U_y} \beta \right) v = 0 \quad (25)$$

Gleichung (25) läßt sich nur für den Fall

$$\sigma/k = U_0 \quad (26)$$

analytisch lösen. Die Bedingung (26) schließt stationäre Wellen unter der Voraussetzung $U_0=0$ mit ein. Gleichung (25) wird dann zu:

$$v_{yy} - \left(k^2 - \frac{1}{y U_y} \beta \right) v = 0 \quad (27)$$

In Gl. (27) kommt die Frequenz σ nicht mehr vor. Alle Wellen, die (26) erfüllen haben gleiche Wellenzahlen bei gleichem Scherstromgradienten, sie "driften" mit der Phasengeschwindigkeit U_0 und sind für einen Betrachter, der sich am Rand mit der Geschwindigkeit U_0 bewegt stationär. In Analogie zu den äquatorialen Rossby-Wellen und den Randwellen versuchen wir Lösungen durch Separation in ein endliches Polynom und eine abklingende Exponentialfunktion zu gewinnen. Die Randbedingungen Gl. (27) erfüllt der Ansatz:

$$v(y) = y \check{v}(\xi) e^{-\xi} \quad \text{mit} \quad \xi = ky \quad (28)$$

Gl. (28) setzen wir in (27) ein und erhalten:

$$\xi \check{v}_{\xi\xi}(\xi) - 2(\xi - 1)\check{v}_{\xi} + \left(\frac{\beta}{kU_y} - 2\right)\check{v}(\xi) = 0 \quad (29)$$

Es ist durch Einsetzen einer endlichen Potenzreihe in Gl. (29) leicht zu sehen, daß endliche Polynome als Lösungen nur unter der Bedingung:

$$\left(\frac{\beta}{kU_y} - 2\right) = 2n \quad \text{oder} \quad k_n = \frac{\beta}{2(n+1)U_y} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

existieren. Die Lösungen für $\check{v}(\xi)$ lauten dann:

$$\begin{aligned} \check{v}_{n=0}(\xi) &= 1, & \check{v}_{n=1}(\xi) &= 1 - \xi, & \check{v}_{n=2}(\xi) &= 1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{3}, \\ \check{v}_{n=3}(\xi) &= 1 - 3\xi + 2\xi^2 - \frac{\xi^3}{3}, & \check{v}_{n=4}(\xi) &= 1 - 4\xi + 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{2}{15}\xi^4, \\ \check{v}_{n=5}(\xi) &= 1 - 5\xi + \frac{20}{3}\xi^2 - \frac{10}{3}\xi^3 + \frac{2}{3}\xi^4 - \frac{2}{45}\xi^5, \dots \\ \check{v}_n(\xi) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{(k+1)!} (-2\xi)^k \end{aligned} \quad (31)$$

Bzw. die vollständige Lösung von Dgl. (27) für die Meridionalkomponente der Geschwindigkeit mit der Dispersionsrelation (30) lautet:

$$v_n(y) = v_0 \cdot y \cdot \check{v}_n(\xi) e^{-\xi} e^{i(k_n x - \sigma t)} \quad \text{mit} \quad \sigma = 0, \quad \xi = k_n y, \quad k_n = \frac{\beta}{2(n+1)U_y} \quad (32)$$

Im Gegensatz zu den äquatorialen Rossby-Wellen mit den Lösungen

$$v_n(y) = v_0 H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{i(k_n x - \sigma t)} \quad \text{mit} \quad \xi = y \sqrt{\frac{\beta}{c}}, \quad (33)$$

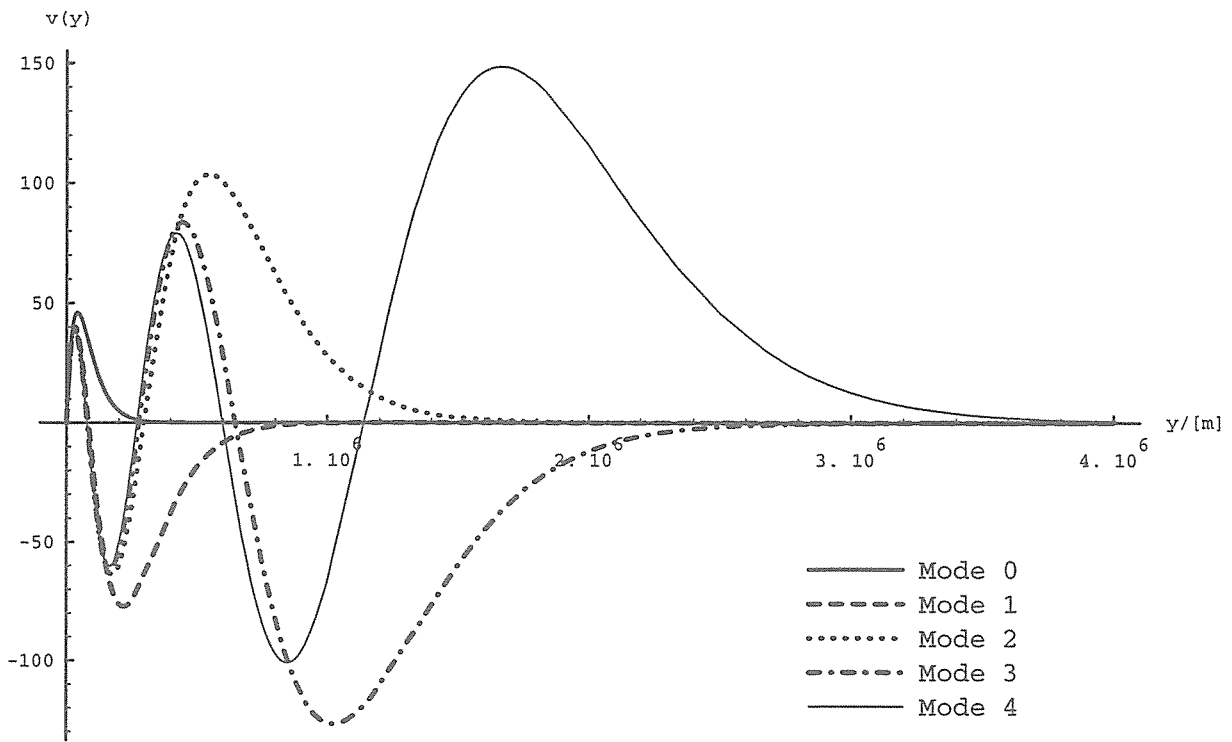


Abb.1 Amplitudenfunktionen der Nordkomponente der Strömung stationärer Rossby-Wellen auf linear anwachsendem Scherstrom ($\beta=1.2 \cdot 10^{-11} \text{s}^{-1} \text{m}^{-1}$, $U=U_y(=2.5 \cdot 10^{-7} \text{s}^{-1}) \cdot y$)

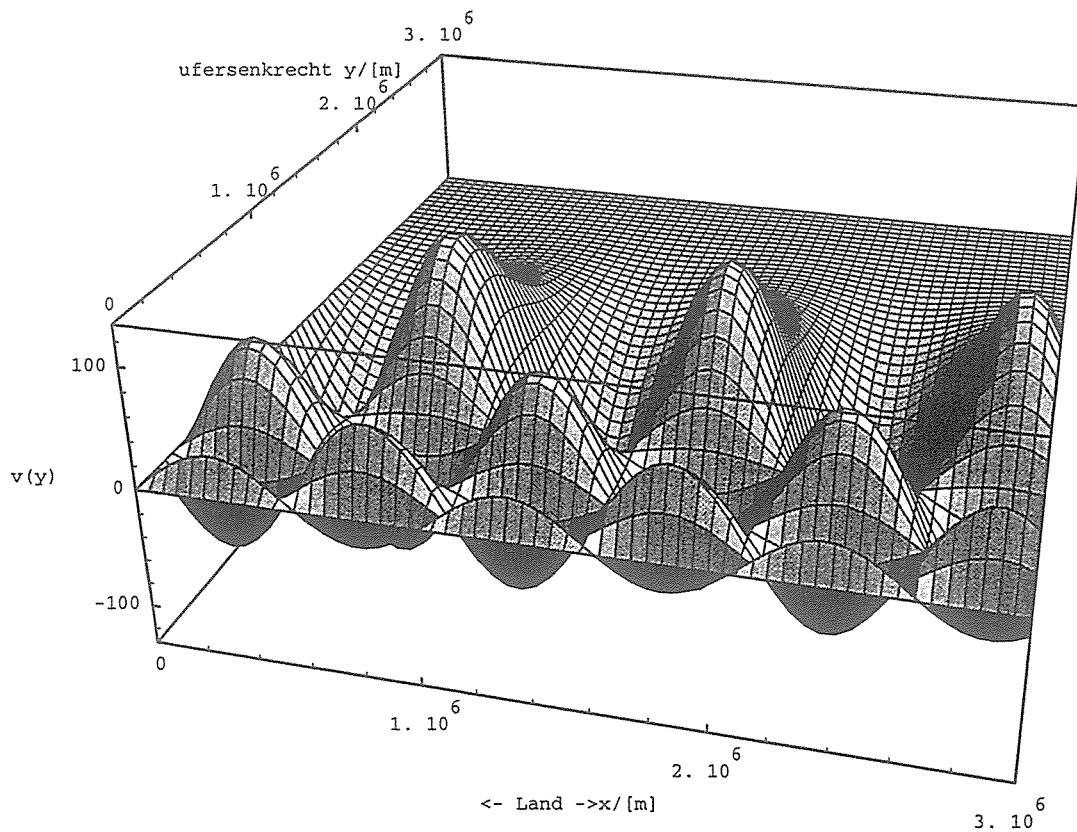


Abb.2 Amplitude der Nord-Südkomponente der Strömung des 3. Modes der stationären Rossby-Welle auf linearem Stromprofil ($\beta=1.2 \cdot 10^{-11} \text{s}^{-1} \text{m}^{-1}$, $U=U_y(=2.5 \cdot 10^{-7} \text{s}^{-1}) \cdot y$).

wobei H_n die Hermiteschen Polynome bedeuten, fällt die Amplitude der am linearen Zirkumpolarstrom gefangenen Rossby-Wellen mit e^{-ky} in Richtung Meer ab. Dieses Verhalten haben diese Wellen wiederum mit den Randwellen (edge wave) gemein, wobei die Amplitudenfunktionen bei den Randwellen auf linearem Bodenprofil die Laguerresche Polynome sind (Krauss, 1973).

$$v_n(y) = v_0 [L_n(2\xi)]_y e^{-\xi} e^{i(k_n x - \sigma t)} \quad \text{mit} \quad \xi = k_n y \quad (34)$$

Alle diese Wellen haben eine modale Struktur. Die Amplitudenfunktionen $v(\xi)$ und die der Randwellen auf linearem Bodenprofil $L_n(2\xi)$ sind an der Küste Null, die Amplitudenfunktionen $H_n(\xi)$ sind zum Äquator spiegelsymmetrisch. Das Amplitudenverhalten der am Zirkumpolarstrom gebundenen Wellen und der äquatorialen Rossby-Wellen ist ähnlich, die Amplituden der höheren Moden nehmen stetig von Nulldurchgang zu Nulldurchgang zu, die Amplituden der Randwellen dagegen ab, obwohl die Entwicklungskoeffizienten (31) sich nur wenig von den Laguerreschen Polynomen unterscheiden. Die Lösungen (31) gehören wie die Hermiteschen und Laguerreschen Polynome zu den konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Genau wie bei den äquatorialen Rossby-Wellen und den Randwellen bilden die Lösungen (31) ein orthogonales System, d.h.

$$\int_0^{\infty} v_n(y) v_m(y) dy = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m . \quad (35)$$

Setzen wir in Gl. (30) $\beta = 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ und $U_y = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, erhalten wir $k_0 = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ($l_0 = 261.8 \text{ km}$), $k_1 = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ($l_1 = 523.6 \text{ km}$), $k_2 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ ($l_2 = 785.4 \text{ km}$), $k_3 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ ($l_3 = 1047 \text{ km}$), Wellenlängen, die in der Natur vorkommen können. Wenn wir einen Grundstrom $U_0 > 0$ an der Küste zulassen, mit $U(y) > 0$ für alle y oder $\sigma \neq 0$ wählen, ist Gl. (25) nur noch numerisch lösbar. Es ist leicht aus Gl. (25) abzulesen, daß eine Welle bei gleichmäßiger Erhöhung oder Erniedrigung des Grundstroms U_0 über den ganzen Kanal bei beliebigem Stromprofil (es treten dann höhere Glieder in y auf) seine räumlichen Eigenschaften nicht ändert. Es kommt zu einem "Verdriften" der Welle mit dem Grundstrom, der außenstehende Beobachter bemerkt eine Änderung der Phasengeschwindigkeit und wegen $k = \text{const.}$, eine Änderung der Frequenz. Aus gleichen Gründen ist es nur notwendig, die Abhängigkeit der Wellenzahl k vom Grundstrom bei einer Frequenz zu bestimmen, z.B. $\sigma = 0$. Beliebige Wertepaare für σ und k lassen sich aus der Funktion $d(k)$ gewinnen, wegen $d = U_0 - \sigma/k$ und

$$v_{yy} - \left(k^2 - \frac{1}{d + y U_y} \beta \right) v = 0 . \quad (36)$$

Ebenso ist leicht zu sehen, daß die Phasengeschwindigkeit der Rossby-Wellen in Richtung des Grundstroms nie größer als der Grundstrom selbst werden kann. Ist $c > U_0$, wird der Bruch in der Differentialgleichung (25) bzw. (36) für $y = (U_0 - c)/U_y$ unendlich, die Gleichung hat eine Polstelle und läßt sich nicht lösen.

3. Numerische Ergebnisse

Wir haben einen in Ost-West-Richtung unendlich langen Kanal von 4000 km Breite untersucht. Die Kanalmitte soll sich bei 60° südlicher Breite befinden. Um (16) bzw. (19) zu lösen sind noch

Vorgaben für den Strom $U(y)$ notwendig. Wir haben zwei Stromprofile näher untersucht. Gl. (16) bzw. (19) wurden mit einem Runge-Kutta-Verfahren integriert, mit dem Startpunkt Küste und den Randbedingungen (21). Wir müssen zu jedem σ ein k suchen, das die Randbedingung (20) erfüllt. Es ist zwar ausreichend, wenn man ein kleines ϵ vorgibt, innerhalb dessen sich die Lösung für große y bewegt, aber dieser Punkt ist von der Modenzahl und der Frequenz stark abhängig und damit automatisch sehr schwer zu finden. Um die Randbedingungen (20) zu erfüllen bedienen wir uns des Wissens um die modale Struktur der Wellen (siehe Abb. 1). Wir beginnen mit einem zu großen k und erniedrigen k solange in großen Schritten, bis die Geschwindigkeit v den ersten Nulldurchgang hat (für den Wasserstand gilt ähnliches, die Zahl der Nulldurchgänge ist aber um eins höher). Jetzt ist die Schrittweite stetig zu erniedrigen und mit dem vorletzten k -Wert erneut zu beginnen, denn die exakte Lösung berührt die y -Achse erst im Unendlichen, wird sie im Endlichen geschnitten (gilt so für v und $n=0$), ist k etwas zu klein. Man sucht die Wellenzahl k , für die gilt, $v(k+\epsilon)>0$, für alle $y>0$ und $v(k)=0$ für ein großes y . Analoges gilt für die Modezahlen $n=1,2,3,\dots$, die Zahlen der Nulldurchgänge unterscheiden sich jeweils um eins, wenn man k_n um ϵ erniedrigt, wobei mit k_n die gesuchte Wellenzahl bezeichnet werden soll. Das Verfahren setzt dabei nichts über die möglichen Dispersionsbeziehungen voraus, sondern benutzt lediglich die Eigenschaft der analytischen Lösung, daß die Wellenzahl k mit steigender Modezahl n abnimmt. Der so beschriebene Algorithmus wurde in FORTRAN programmiert.

3.1 Linear anwachsender Grundstrom auf der β -Ebene

Im linearen Fall haben wir einen Strom vorgegeben, der von U_0 an der Küste auf $1\text{m/s}+U_0$ am gegenüberliegenden Kanalufer (4000 km Breite) ansteigt.

$$U(y)=U_0+2.5*y*10^{-7} \quad (37)$$

Ein solches Profil ist wenig realistisch, soll uns aber einige grundlegende Erkenntnisse liefern.

1. Liefert das numerische Verfahren für hinreichend kleine U_0 die analytische Lösung?
2. Wie ändern sich die Wellenzahlen k der stationären Lösungen mit Vergrößerung von U_0 ?
3. Wie lautet die Dispersionsbeziehung der am Zirkumpolarstrom gebundenen Rossby-Wellen?

Zur Überprüfung dieser Fragen sind zwei Wege beschritten worden, die sich gegenseitig ergänzen. Mit "Mathematica 2.2" konnten die Differentialgleichungen direkt über ein Runge-Kutta Verfahren gelöst und graphisch dargestellt werden. Ein FORTRAN-Programm liefert bei gegebenen Scherstromprofilen die Dispersionsrelation nach den oben beschriebenen adaptiven Verfahren. Das FORTRAN-Programm benutzt ein Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung, während Mathematica durch adaptive Verfahren mit höheren internen Genauigkeiten und variabler Schrittweite höhere Rechengenauigkeit erzielt. In beiden Verfahren ist die relative Fehler kleiner als 10^{-6} und damit ausreichend. Überprüft wurde dies anhand der analytischen Lösungen (30) und (31). In Abb. 3 ist das Dispersionsdiagramm für einen Scherstrom nach Gl. (37) dargestellt. Bei gegebenem Grundstrom U_0 und gegebener Wellenzahl k läßt sich nicht nur die Frequenz σ der Rosby-Welle ablesen, sondern auch zur Frequenz σ und zum Grundstrom U_0 die zugehörige Wellenzahl k iterativ bestimmen. Die Werte mit $d>0.01 \text{ ms}^{-1}$ des vierten Modes lassen sich in dem oben beschriebenen Kanal nicht mehr realisieren, er ist hierfür zu schmal. Unterschiede, die sich aus der Benutzung der genäherten Gl. (27) und der vollständigen Gl. (16) ergeben sind in Abb. 3 nicht darstellbar, sie sind kleiner als 1%.

3.2 Exponentiell anwachsender und abfallender Grundstrom auf der β - und δ -Ebene

Ein eher natürliches Scherstromprofil wächst bis zur Kanalmitte an um dann wieder auf niedrigere Werte abzufallen. Wir benutzen das gleiche Grundstromprofil wie Harlander und Metz (1998)

$$U(y) = U_0 * e^{-100 * (y * 10^{-7} - 0.2)^2}, \quad U_0 = 1 \text{ m/s} \quad (38)$$

Das Profil wird an beiden Küsten nicht Null ($U(0) = U(4000000) = 0.02 \text{ m/s}$). Neben den stationären Lösungen sind auch Wellen möglich, die von West nach Ost laufen. Gleichzeitig wurden zwei Fälle unterschieden, β -Ebene und δ -Ebene. Beide Funktionen schneiden sich in Kanalmitte und haben den Wert von Gl. (22) bei -60° Breite.

1. (β -Ebene) $f(y) = -1.26 * 10^{-4} + (y - 2 * 10^{-6}) * 1.2 * 10^{-11}$
2. (δ -Ebene) $f(y) = -1.26 * 10^{-4} + (y - 2 * 10^{-6}) * 1.2 * 10^{-11} + (y - 2 * 10^{-6})^2 * 1.73 * 10^{-18}$

(39)

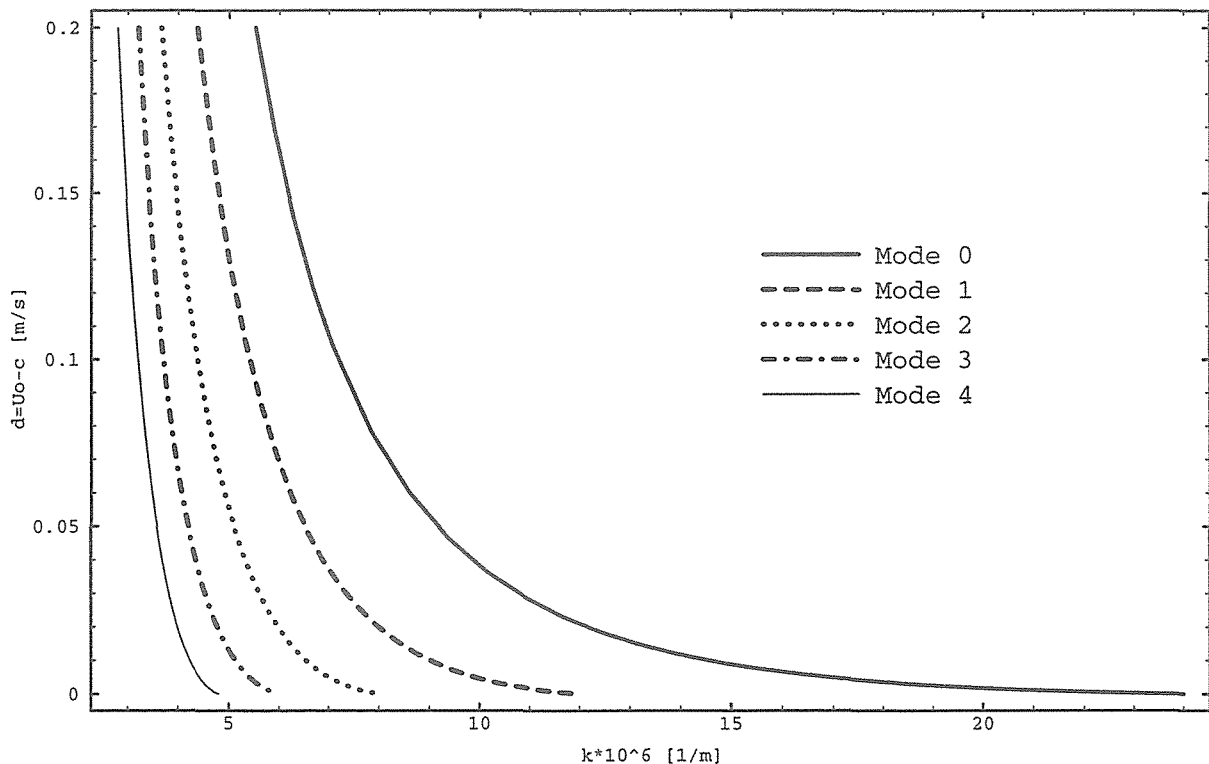


Abb.3 Dispersion der ersten fünf Rossby-Wellen Moden, die am linearen Scherstrom gebunden sind. Aus der Geschwindigkeit $d = U_0 - \sigma/k$ lässt sich bei gegebenen U_0 die Frequenz σ der Welle bestimmen oder auch umgekehrt.

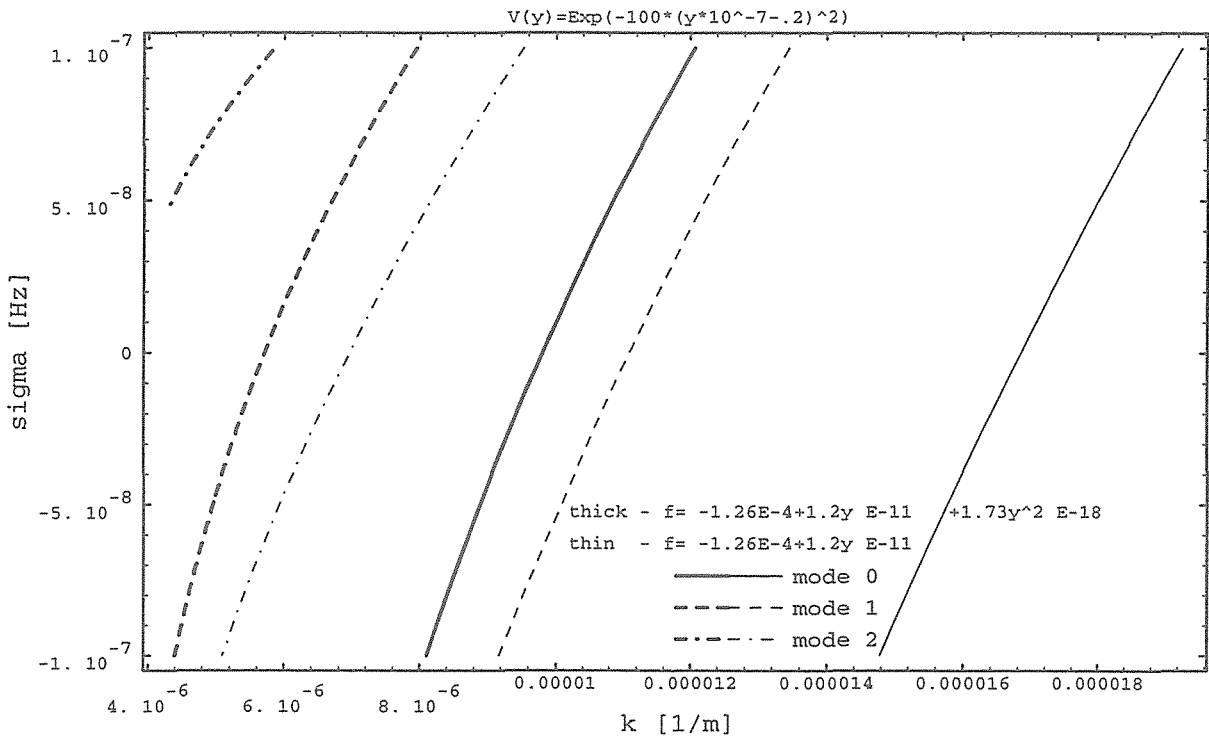


Abb. 4 Dispersion der gebundenen Rossby-Wellen auf exponentiell anwachsendem und abfallendem Scherstromprofil (Gl. (29)) auf der β - und δ -Ebene.

Die berechneten Dispersionskurven sind in Abb. 4 dargestellt.

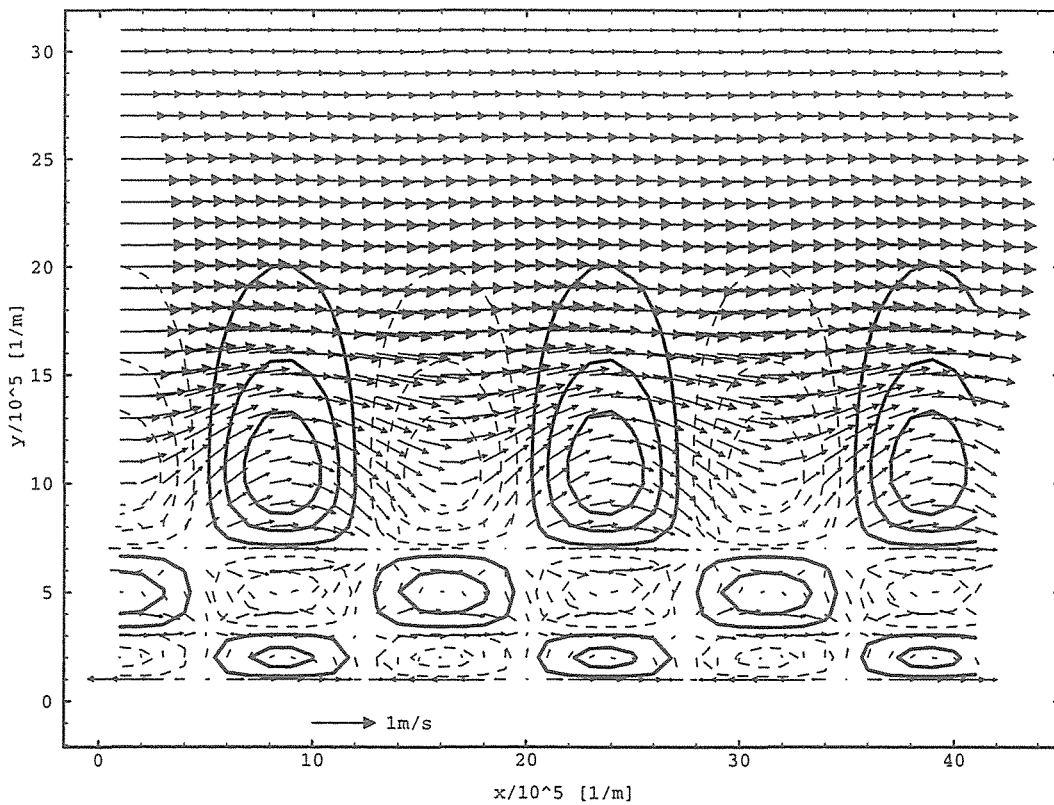


Abb. 5 Durch eine stationäre Rossby-Welle (2. Mode, $k=4,15 \cdot 10^{-6} \text{m}^{-1}$) beeinflusstes exponentielles Stromprofil (Gl.(29)). Die Isolinien geben die Wasserstandsauslenkung an, die bei der gewählten Skalierung im Maximum 1m beträgt.

4. Diskussion

Die Dispersionsbeziehungen der an einem Scherstrom gebundenen Rossby-Wellen haben alle eine Gemeinsamkeit: Die Gruppengeschwindigkeit und damit der Energiefluß ist immer positiv in Richtung Zirkumpolarstrom von Ost nach West gerichtet. Die dabei auftretenden Gruppengeschwindigkeiten sind sehr klein und liegen in der Größenordnung 0.02 ms^{-1} . Diese Gruppengeschwindigkeit (siehe Abb. 4) ist nur geringfügig von der Frequenz abhängig und ändert sich wenig von Modenzahl zu Modenzahl. Das bedeutet, daß eine Wellengruppe bestehend aus mehreren Moden und mehreren Frequenzen nur geringe Dispersion zeigt. Die Energie der Wellengruppe benötigt sechs Jahre, um den in Abb. 5 dargestellte Kanalausschnitt (1/5 des Erdumfangs in diesen Breiten) zu durchlaufen.

Einen sehr großen Einfluß auf die Wellenzahl einer am Zirkumpolarstrom gebundenen Rossby-Welle hat dagegen die Coriolis-Kraft. In Gl. (25) wird der Bruch im Bereich kleiner $c-U(y)$ sehr groß und dieser Einfluß wird durch die Coriolis-Kraft verstärkt. Das exponentielle Stromprofil (Gl. (38)) hat diesen Punkt in der Nähe der Küste. Hier liefert die β -Ebene gegenüber der δ -Ebene zu große negative Werte, außer man gleicht beide Approximationen an der Küste an. Man hat dann für große y stärkere Abweichungen, die bei diesem Stromprofil aber nicht ins Gewicht fallen. Für die durchgeführten numerischen Rechnungen bietet sich für die Coriolisbeschleunigung Gleichung (22) an. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind im Sinne einer Sensitivitätsstudie bezüglich f zu betrachten.

Im Falle eines linearen Stromprofils wurde gezeigt, daß die Größe $d = \sigma/k - U_0$ einen erheblichen Einfluß auf die Dispersionsrelation hat. Der Parameter d ist für beliebige Stromprofile (Gl. 36) einführbar. Analog der Behandlung des linearen Stromprofils (siehe Abb. 3) ist die Abhängigkeit der Dispersionsrelation vom Grundstrom bestimmbar, so daß die Funktion $k(d)$ die vollständige Information für das untersuchte Grundstromprofil liefert.

Fünf große Hindernisse, nämlich Südantillenbogen, Südatlantischer Rücken, Kerguelenrücken, Macquarieschwelle und Südpazifischer Rücken, müssen von der zirkumpolaren Strömung überschritten werden (Dietrich u.a. 1975, S. 456). Da die potentielle Vorticity beim Überströmen dieser Hindernisse konstant bleiben muß, kommt es zur Auslenkung der mittleren Strömung und möglicherweise zur Anregung topographischer Rossby-Wellen. Diese Wellen sind aber im Wellenleiter Zirkumpolarstrom gefangen und es kommt zu keiner meridionalen Energieabstrahlung, eine stationäre Rossby-Welle kann sich einstellen. Hinweise auf die Existenz solcher Wellen findet man in den Karten der mittleren relativen Topographie der Meeresoberfläche (z.B. Bearman, 1989). Hughes (1995) findet Rossby-Wellen in den Altimeterdaten von TOPEX/POSEIDON und im hochauflösenden numerischen Modell. Die Wellenparameter stimmen größenordnungsmäßig mit den hier gefundenen überein, wobei die Küste keine Rolle zu spielen scheint. Die hier gemachten Voraussetzungen müssen weiter modifiziert werden, die Rolle der Küste übernehmen kritische Linien mit $c-U(y)=0$.

5. Schlußfolgerungen

Die hier vorgestellten Ergebnisse geben einige Anhaltspunkte zur Identifizierung von Rossby-Wellen im antarktischen Zirkumpolarstrom. Es ist sicherlich zur Zeit nicht möglich genügend hochauflösende Informationen über das Stromsystem in den erforderlichen Breiten und Tiefen zu bekommen. Auf der anderen Seite gibt es hochauflösende Altimeterdaten, die entsprechend aufbereitet werden müssen. Um die stationären Rossby-Wellen von den Schwereanomalien zu trennen, ist nach Zyklen in zonalen Spektren zu suchen. Höhere Moden müssen sich durch Gegenphasigkeit in zwei benachbarten Zonen auszeichnen. Die Größe der zu untersuchenden Strukturen dürfte nicht kleiner als 250 km sein.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Dr. U. Harlander für die Anregung zu dieser Arbeit und für die hilfreiche Diskussion und bei Herrn M. Simmel für die kritische Korrektur bedanken.

6. Anhang

Zur Ableitung der Differentialgleichung für die Amplitudenformfunktion der Wasserstands- auslenkung η benutzen wir die gleichen Bezeichnungen und Abkürzungen wie oben und lassen wieder den Stern weg:

$$p = \sigma - kU, \quad d = f - U_y$$

In (9) und (10) kann man u und v durch η ersetzen

$$v = -i \frac{pg\eta_y + gkf\eta}{p^2 - fd} = -i \frac{(\sigma - kU)g\eta_y + gkf\eta}{(\sigma - U)^2 - f^2 + fU} \quad (\text{A1})$$

$$u = \frac{pgk\eta + dg\eta_y}{p^2 - fd} = \frac{(\sigma - kU)gk\eta + (f - U_y)g\eta_y}{(\sigma - kU)^2 - f^2 + fU} \quad (\text{A2})$$

Aus (11), (A1) und (A2) ergibt sich:

$$\eta = -\frac{g}{p} \left[\frac{ph\eta_y}{p^2 - fd} \right]_y - \frac{gk}{p} \left[\frac{hf\eta}{p^2 - fd} \right]_y + \frac{gk^2 h\eta}{p^2 - fd} + \frac{dgkh\eta_y}{p(p^2 - fd)} \quad (\text{A3})$$

Wir führen analog zu Howd et al. (1992) eine effektive Wassertiefe h' ein.

$$h'(y) = \frac{h(y)}{p^2 - fd} = \frac{h(y)}{(\sigma - kU(y))^2 - f^2 + fU_y(y)} \quad (\text{A4})$$

Aus Gl. (A3) wird dann eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in η , wobei die Ableitungen von f und h' nach y bei gegebenem Grundstrom U bekannt sind.

$$g[h' \eta_y]_y + (1 - gk^2 h' + \frac{gk}{(\sigma - kU)} [h' f]_y) \eta = 0 \quad (\text{A5})$$

Literatur:

- Bearman, G. (Editor), J. Brown u.a. (1989) Ocean Circulation. Pergamon Press, S. 57
- Dietrich, G., K. Kalle, W. Krauss und G. Siedler (1975) Allgemeine Meereskunde, Eine Einführung in die Ozeanographie. Geb. Borntraeger, Berlin-Stuttgart
- Gill A. E. (1982) Atmosphere - Ocean Dynamics. International Geophysics Series, Vol. 30, Academic Press
- Howd, P. A.; Bowen, R. A.; Holman, R. A. (1992) Edge waves in strong longshore currents. *J. Geophys. Res.*, **97**, 11357-11371.
- Harlander U. und W. Metz (1998) Rossby wave propagation in a bounded ocean current. *Wiss. Mitt. aus dem Inst. für Meteorologie der Univ. Leipzig und dem Inst. für Troposphärenforschung e.V. Leipzig, Meteorologische Arbeiten aus Leipzig (III) Band 9*
- Hughes, C. W. (1995) Rossby Waves in the Southern Ocean: A comparison of TROPEX/POSEIDON altimetry with model prediction. *J. Geoph. Res.*, **100**, 15933-15950

- Krauss, W. (1973) Methoden und Ergebnisse der theoretischen Ozeanographie. (I) Dynamics of the homogeneous and the quasihomogeneous ocean. Berlin-Stuttgart
- LeBlond P. H. and L. A. Mysak (1978) Waves in the Ocean. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam
- Pedlosky J. (1987) Geophysical Fluid Dynamics, Second Edition, Springer-Verlag
- Schönfeldt, H.-J. (1991): Dispersionsbeziehungen von Randwellen auf natürlichen Bodenprofilen mit uferparallelen Sandbänken; Beitr. zur Meereskunde **62** (53-68)
- Schönfeldt, H.-J. (1994): Randwellen in der Ostsee und anormale Dispersion in der Brandungszone; D. Hydrogr. Z. **46** (81-98)
- Schönfeldt, H.-J. (1995): On the modification of edge waves by longshore currents; Continental Shelf Research, **15** (1213-1220)

Anschrift des Autors

H.-J. Schönfeldt (email: gpphjs@kpkom23.meteo.uni-leipzig.de)
Institut für Meteorologie (LIM)
Stephanstr. 3
D-04103 Leipzig