



UNIVERSITÄT LEIPZIG

Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Exakte Steuerbarkeit von Wellengleichungen

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Mathematiker

vorgelegt von Faissal Ait Balkassam
Betreuender Hochschullehrer : Prof. Dr. Matthias Günther

11. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Zusammenfassung	4
1.2	Funktionalanalytische Grundlagen	5
1.3	Wellengleichung und das Huygens-Prinzip	13
2	Die exakte Steuerbarkeit der Wellengleichung	18
2.1	Das Steuerungsproblem, Dirichlet Randwertproblem	18
2.2	Beschreibung der HUM-Methode in abstrakten Räumen	20
2.3	Die exakte Steuerbarkeit in klassischen Räumen	25
2.4	Die geometrische Interpretation der Menge $\Gamma(x^0)$	31
3	Die exakte Randsteuerbarkeit der Bernoulli-Euler Gleichung und der Euler-Poisson-Darboux Gleichung	39
3.1	Die Bernoulli-Euler Plattengleichung	39
3.2	Die Existenz und die Regularität der Lösungen	48
3.3	Euler-Poisson-Darboux Gleichung	51
4	Die exakte Randsteuerbarkeit von zwei gekoppelten Wellengleichungen	59
4.1	Formulierung des Problems	59
4.2	Satz der exakten Steuerbarkeit von zwei gekoppelten Wellengleichungen	64
5	Die innere exakte Steuerbarkeit der Wellengleichung	68
5.1	Formulierung des Problems	68
5.2	Satz der inneren exakten Steuerbarkeit der Wellengleichung	71

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlichst bei Herrn Prof. Dr. Matthias Günther für die stets hervorragende Betreuung bedanken. Zudem bedanke ich mich noch für seine freundliche Beratung und seine Bereitschaft sich mit mir zu treffen, um über aufkommende Schwierigkeiten zu diskutieren.

Mein besonderer Dank gilt ebenso Sandra Weidner, welche meine Arbeit auf sprachliche Fehler Korrektur gelesen hat.

1 Einleitung

1.1 Zusammenfassung

Steuerbarkeit im engeren Sinne befasst sich mit der Formulierung und Lösung von Kontrollproblemen (auch Steuerungs- oder Regelungsproblem genannt). Bei Kontrollproblemen geht es vor allem um die Frage, inwiefern sich ein System über die Steuervariablen so beeinflussen lässt, dass sein Verhalten einem vorgegebenen Muster möglichst nahe kommt. In dieser Arbeit befassen wir uns im ersten bzw. im zweiten Kapitel mit der exakten Randsteuerbarkeit der Wellengleichung bzw. der exakten Randsteuerbarkeit von jeweils BE¹-Gleichung und EPD²-Gleichung. Dabei handelt es sich um die Existenz und die Konstruktion einer auf dem Randgebiet definierten Steuerfunktion, die das Steuerungsproblem zu einem festen Zeitpunkt in einen gewünschten Zielzustand überführen kann. Da die Lösung des Problems von dem Funktionenraum der Anfangsdaten abhängig ist, hängt somit auch die Lösung von dem Raum der Steuerfunktion ab. Das Steuerungsproblem bzw. die gegebenen Anfangsdaten und die gesuchte Steuerfunktion müssen in geschickten Räumen interpretiert werden. Anhand der HUM-Methode³, diese Methode geht zurück auf das in [6] beschriebene HUM-Prinzip, können wir diese Räume definieren oder wenigstens charakterisieren. Im vierten Kapitel untersuchen wir mit dem bereits erläuterten HUM-Prinzip die exakte Steuerbarkeit von zwei gekoppelten Wellengleichungen. Im fünften Kapitel kehren wir dann zu der ursprünglichen Wellengleichung zurück und untersuchen dabei ihre innere exakte Steuerbarkeit⁴. Bei diesem handelt es sich um die Existenz einer, im Inneren vom gegebenen Gebiet definierten, Steuerfunktion.

¹Bernoulli-Eulersche

²Euler-Poisson-Darboux

³"Hilbert Uniqueness Method" nach J.-L.Lions

⁴internal exacte controllability

1.2 Funktionalanalytische Grundlagen

Sobolev-Räume

Sobolev-Räume spielen eine herausragende Rolle bei der modernen Behandlung partieller Differentialgleichungen. Dies betrifft sowohl die Analysis, als auch die numerische Lösung, sowie darauf aufbauende Disziplinen wie zum Beispiel die optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen. Der Begriff der klassischen Lösung stellt sich dabei als zu eng heraus. Sobolev-Räume sind geeignete Funktionenräume, um schwächere Lösungsbegriffe zu definieren. Die in diesem Abschnitt dargestellten mathematischen Definitionen und Sätze sind wesentlicher Bestandteil der Funktionalanalysis und in zahlreichen Arbeiten in verschiedener Allgemeinheit zu finden. Es werden nur die Begriffe vorgestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden und damit für das Verständnis notwendig sind.

Definition 1 (Sobolev-Raum) :

Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$ besteht aus allen $u \in L_p(\Omega)$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für welche die schwachen Ableitungen $\partial^\alpha u$ bis zur m -ten Ordnung existieren und in $L_p(\Omega)$ liegen, d.h.:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Definition 2 (Schwache Ableitung) :

Es seien $u, w \in L_1^{loc}(\Omega)$. Wir erklären:

$$\partial_i u = w \text{ schwach} \Leftrightarrow \int_{\Omega} u \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} w \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

und wir bezeichnen w als i -te, schwache, verallgemeinerte Ableitung von u . Für höhere Ableitungen sei zunächst $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex. Seien ferner $u, w \in L_1^{loc}(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion w heißt die α -te, schwache, verallgemeinerte Ableitung von u , in Zeichen: $\partial^\alpha u = w$, gdw. gilt:

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definition 3 (Norm in $W^{m,p}(\Omega)$) :

Die Räume $W^{m,p}(\Omega)$ werden mit den folgenden Sobolev-Normen versehen

$$\|u\|_{m,p} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad \text{für } 1 \leq p < \infty.$$

Ist $p = +\infty$, dann ist⁵ : $\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

⁵Es ist $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\}$ mit

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \{\inf M > 0 : |u(x)| \leq M \text{ f.ü. in } \Omega\}.$$

Bemerkung 1 :

Für $p = 2$, schreibt man auch $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.

Satz 1 :

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum.

Satz 2 :

$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes:

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v) dx.$$

Definition 4 :

$W_0^{m,p}(\Omega) :=$ Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$, d.h. bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{m,p}$.

Folgerung 1 :

$W_0^{m,p}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $W^{m,p}(\Omega)$.

Satz 3 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < +\infty$. Dann existiert eine Folge $(u_j) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ mit $u_j \rightarrow u$ in $W^{m,p}(\Omega)$.

Bemerkung 2 :

Die Behauptung des Satzes bedeutet, dass $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ ist. Daraus folgt der wohlbekannte Satz von Meyers und Serrin

$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega),$$

wobei $H^{m,p}(\Omega)$ als Vervollständigung von $\left\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < +\infty\right\}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ erklärt wird, also

$$H^{m,p}(\Omega) \stackrel{\text{Def.}}{=} \overline{\left\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < +\infty\right\}}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

Dem Raum $L^2(\Omega)$ kommt eine besondere Bedeutung zu. In ihm ist durch

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$$

ein Skalarprodukt definiert, welches die Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

erzeugt.

Häufig werden wir auch in dieser Arbeit die Räume H^1 und H_0^1 benutzen. Wobei

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

mit dem Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} u v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

und der Norm :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx + |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definition 5 :

$$H_0^1(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Satz 4 (Poincaré-Friedrichsche Ungleichung) :

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $p \geq 1$. Dann existiert ein $C > 0$ mit :

$$\int_{\Omega} |u|^p \, dx \leq C \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^p \, dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

und

$$|u|_{1,p} \stackrel{Def.}{=} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist eine zu $\|\cdot\|_{1,p}$ äquivalente Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$. D.h. es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit:

$$C_1 \|u\|_{1,p} \leq |u|_{1,p} \leq C_2 \|u\|_{1,p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Die Normen auf $H_0^1(\Omega)$ sind für $p = 2$ äquivalent.

Beweis: s.[25], [28]

Bemerkung 3 :

$W_0^{1,2}(\Omega) =: H_0^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes:

$$(u, v)_{1,2} \stackrel{Def.}{=} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u)(\partial_i v) \, dx.$$

Dieses Skalarprodukt erzeugt die Norm $|\cdot|_{1,2}$.

Satz 5 (Sobolevscher Einbettungssatz) :

Es sei $1 \leq p < n$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann existiert ein $C = C(n, p, \Omega)$ mit:

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

D.h.

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$$

Beweis: s. [30, S. 212]

Korollar 1 (allgemeiner Sobolevscher Einbettungssatz) :

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $m \in \mathbb{N}$:

(i) Für $1 \leq p < +\infty$ und $m < \frac{n}{p}$ gilt:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega), \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \quad \left(q = \frac{np}{n - mp} \right)$$

(ii) Ist $m = \frac{n}{p}$, so gilt $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < +\infty$.

Beispiel:

1) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wie im Satz, so gilt $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_6(\Omega)$ mit $p^* = \frac{3 \cdot 2}{3 - 2} = 6$.

Definition 6 :

Sei $1 \leq p < n$, dann heißt $p^* := \frac{np}{n - p}$ der zu p Sobolev-konjugierte Exponent.

Satz 6 (Gagliardo-Nirenberg Ungleichung) :

Es sei $1 \leq p < n$, dann existiert ein $C = C(n, p)$ mit:

$$\|u\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C |u|_{1,p,\mathbb{R}^n} \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.1)$$

Hierbei ist:

$$|u|_{1,p,\mathbb{R}^n} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Beweis: s. [30, S. 278]

Satz 7 (Verallgemeinerung der Poincaré-Friedrichschen Ungleichung) :

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $1 \leq p < n$. Dann gibt es für jedes q mit $1 \leq q \leq p^*$ eine Konstante $C = C(n, p, q, \Omega)$ mit:

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq C |u|_{1,p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis:

Zu $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert eine Folge $(u_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit

$$u_j \rightarrow u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

Wir dehnen die Funktionen u_j durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ aus. Nach der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung existiert ein $C = C(n,p)$ mit:

$$\|u_j\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u_j|_{1,p,\mathbb{R}^n}$$

und

$$\|u_j - u_k\|_{L_{p^*}(\Omega)} = \|u_j - u_k\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u_j - u_k|_{1,p,\mathbb{R}^n} = C|u_j - u_k|_{1,p,\Omega}.$$

Für $j \rightarrow \infty$ folgt $u_j \rightarrow v$ in $L_{p^*}(\mathbb{R}^n)$ und $L_{p^*}(\Omega)$ und damit $v = u$ in Ω .

Wegen $v|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0$ ist schließlich:

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} = \|v\|_{L_{p^*}(\Omega)} = \|v\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C|v|_{1,p,\mathbb{R}^n} = C|u|_{1,p}.$$

Da $|\Omega| < \infty$ ist, gilt die Behauptung auch für $1 \leq q < p^*$. □

Satz 8 (Rellich-Kondrachov) :

Es sei Ω ein Lipschitzgebiet. Dann ist die Einbettung $H^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ kompakt für $q < \frac{np}{n-p}$. Für $H_0^{1,p}(\Omega)$ ist die gleiche Einbettung kompakt ohne eine Voraussetzung an $\partial\Omega$.

Beweis: cf. [26]

Für Gebiete mit stetigen Rand haben wir folgendes Resultat:

Satz 9 :

Es sei Ω von der Klasse C^0 . Dann ist die Einschränkung der Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf Ω dicht in $H^{m,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweis: cf. [26]

Definition 7 :

Ein Element der Menge $\mathcal{L}(X,Y) := \{A : X \rightarrow Y, A \text{ linear und stetig}\}$ heißt linearer Operator. Der Raum wird ausgestattet mit der Operatornorm

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y, \quad A \in \mathcal{L}(X,Y). \quad (1.2)$$

Definition 8 :

X^ heißt Dualraum von X und ist definiert als $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.*

Satz 10 :

Ist Y vollständig, dann ist der Raum $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ ein Banachraum.

Beweis: cf. [27]

Aus diesem Satz folgt dann, dass X^* mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{X^*}$ ein Banachraum ist.

Definition 9 :

Es sei $y^* \in Y^*$ und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, dann heißt die durch

$$(A^*y^*)(x) := y^*(Ax) \quad (1.3)$$

definierte Abbildung $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ adjungierter Operator von A und somit gilt

$$\langle x, A^*y^* \rangle_{X, X^*} = \langle Ax, y^* \rangle_{Y, Y^*}. \quad (1.4)$$

Satz 11 :

Die Abbildung $\mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, $A \rightarrow A^*$ ist linear und isometrisch, d.h:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)}.$$

Beweis: s. z. B. [24]

Definition 10 :

Für $1 \leq p < \infty$ bezeichne $L^p(0, T; X)$ den Raum aller Äquivalenzklassen messbarer abstrakter Funktionen $f : [0, T] \rightarrow X$, für die gilt:

$$\int_{[0, T]} \|f(t)\|_X^p dx < \infty. \quad (1.5)$$

Außerdem sei für $f \in L^p(\Omega)$ die Norm definiert als

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.6)$$

Definition 11 :

$L^\infty(a, b; X)$ bezeichne den Raum aller Äquivalenzklassen messbarer abstrakter Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die wesentlich beschränkt sind, für die gilt dann

$$\|f(t)\|_X < C \quad \text{für f.a. } t \in [0, T]. \quad (1.7)$$

Für $f \in L^\infty(0, T; X)$ wird die Norm

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| := \inf \{C \in \mathbb{R}, |f(x)| < C \text{ für f.a. } x \in \Omega\} \quad (1.8)$$

gesetzt.

Randabbildungssatz

Der nachfolgende Satz zeigt die Existenz einer Fortsetzung der klassischen Randabbildung $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ von auf $\bar{\Omega}$ definierten Funktionen, falls u einem Sobolevraum angehört.

Satz 12 (Randabbildungssatz) :

Es sei $\Omega \in C^{0,1}$ und $1 \leq p < +\infty$. Dann existiert ein linearer beschränkter Operator

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\partial\Omega),$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $Tu = u|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
- 2) Es gibt ein $C = C(p, \Omega) > 0$, mit : $\|Tu\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Definition 12 :

Man nennt Tu die Spur oder den Randwert von u auf $\partial\Omega$. Man schreibt auch :

$$u|_{\partial\Omega} := Tu.$$

Zerlegung der Eins

Satz 13 :

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und werde durch endlich viele beschränkte offene Mengen $U_i \neq \emptyset$ überdeckt:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i.$$

Beh.: Dann existiert ein endliches Funktionensystem $(\varphi_i)_{i=1}^N$ mit $\varphi_i \in C_c^\infty(U_i)$ und $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ für alle $x \in K$ und $i = 1, \dots, N$, sodass gilt:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in K.$$

Satz 14 (Zerlegung der Eins) :⁶

Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ werde durch eine Familie $\mathcal{U}$ offener Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ überdeckt:

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Dann gibt es eine Funktionenfamilie $\Phi = \{\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \mid i \in I\}$, ($i \in I$ eine abzählbare Indexfamilie) mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Für jedes $i \in I$ gilt: $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- 2) Für jedes $\varphi_i \in \Phi$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\text{supp } \varphi_i \subset U$.
- 3) Auf einer kompakten Menge $K \subset A$ sind nur endlich viele $\varphi_i \in \Phi$ ungleich Null.
- 4) Für jedes $x \in A$ gilt $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

Man sagt, $\Phi = \{\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : i \in I\}$ sei eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\mathcal{U}$.

⁶auch: Zerlegung der Einheit, engl.: Partition of unity

Beweis: s. z. B. Satz.2.13 in [29]

Definition 13 :

Eine Überdeckung (U_j) des $\mathbb{R}^n$ heißt lokal endlich, falls jedes kompakte $K \subset \subset \mathbb{R}^n$ nur mit endlich vielen U_j einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Korollar 2 :

Sei (U_j) eine abzählbare, lokal endliche Überdeckung des $\mathbb{R}^n$ durch beschränkte, offene Mengen U_j . Dann existiert eine Funktionenfolge (φ_j) , $j = 1, 2, \dots$ mit $\varphi_j \in C_c^\infty(U_j)$ und $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $j \in \mathbb{N}$ mit:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung 4 :

Die unendliche Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$ reduziert sich für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ auf eine endliche Summe.

Die Fortsetzung des Vektorfelds

Satz 15 :

Es sei $\partial\Omega \in C^2$. Dann existiert ein Vektorfeld $h = (h_k) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, mit

$$h(x) = \nu(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.9)$$

Beweis:

Da $\Gamma = \partial\Omega \in C^2$, existiert für alle $x \in \Gamma$ eine Umgebung U_x von $x \in \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\sigma \in C^2(U_x, \mathbb{R})$ mit:

- 1) $\nabla \sigma_x(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_x$.
- 2) $\sigma_x(z) = 0 \Leftrightarrow z \in (U_x \cap \Gamma)$.
- 3) $\nu = \frac{\nabla \sigma_x(z)}{|\nabla \sigma_x(z)|} \quad \forall z \in (U_x \cap \Gamma)$.

Die Kompaktheit von Γ liefert:

$$\exists \{x_j\}_{1 \leq j \leq l} \subset \Gamma, \quad \Gamma \subset \bigcup_{j=1}^l U_j, \quad \text{mit } U_j = U_{x_j}, \forall j \in \{1, \dots, l\}. \quad (1.10)$$

Wir definieren nun eine offene Menge $U_0 \subset \Omega$, mit: $\overline{U_0} \subset \Omega$, $\Omega \subset \bigcup_{j=0}^l U_j$ und wir betrachten nach Lemma (14) eine Zerlegung der Eins $\{e_j\}_{0 \leq j \leq l}$ zur Überdeckung $\{U_j\}_{0 \leq j \leq l}$, d.h.:

$$e_j \in \mathcal{D}(U_j), \quad 0 \leq e_j \leq 1 \text{ in } U_j, \forall j \in \{0, \dots, l\}. \quad (1.11)$$

und

$$\sum_{j=1}^l e_j = 1 \quad \text{in } \overline{\Omega}. \quad (1.12)$$

D.h. es gilt auch:

$$\sum_{j=1}^l e_j = 1 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.13)$$

Da $\nu = \frac{\nabla \sigma_x(z)}{|\nabla \sigma_x(z)|} \quad \forall z \in (U_x \cap \Gamma)$ und nach (1.11) und (1.13) folgt:

$$h(x) = \sum_{j=1}^l e_j(x) |\nabla \sigma_j(x)|^{-1} \nabla \sigma_j(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (1.14)$$

wobei $\sigma_j = \sigma_{x_j}$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$. Somit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Einen kürzeren Beweis von Satz (15) findet man in ([10, S. 36]).

Definition 14 :

Es sei Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Das Gebiet Ω hat einen Lipschitz-Rand, wenn es eine $N \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $U_1, U_2, \dots, U_N$ gibt, sodass:

$$a) \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N U_j,$$

b) Für jedes $j = 1, \dots, N$ ist $\partial\Omega \cap U_j$ darstellbar als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion.

Satz 16 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Lipschitz-Rand $\partial\Omega$. Dann existiert ein Vektorfeld $h = (h_k) \in (C^\infty(\mathbb{R}^n))^n$ und $k > 0$ mit:

$$k \leq h(x) \cdot \nu(x) \quad \text{f.ü auf } \Gamma. \quad (1.15)$$

Bemerkung 5 :

Nach (1.9) gilt auch:

$$h(x) \cdot \nu(x) = h_k(x) \cdot \nu_k(x) = 1 \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.16)$$

1.3 Wellengleichung und das Huygens-Prinzip

Der Anschauungsraum $\mathbb{R}^1$

Wir betrachten folgendes Cauchy-Problem:

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0, \\ y(0) &= y^0, y'(0) = y^1. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Die neuen Koordinaten $\xi = x - t, \zeta = x + t$ transformieren die partielle Differentialgleichung $y'' - \Delta y = 0$ zu $-y_{\xi\zeta} = 0$. Diese hat die allgemeine Lösung $y = y(\xi, \zeta) = y_1(\xi) + y_2(\zeta)$. Die Rücktransformation liefert dann $y = y(x, t) = y_1(x - t) + y_2(x + t)$. Damit ist die allgemeine Lösung u der Wellengleichung eine lineare Superposition von zwei Wellen. Der Term $y_1(x - t)$ stellt eine Welle (oder Störung) dar, die sich mit der Geschwindigkeit 1 nach rechts bewegt. Die Welle $y_2(x + t)$ bewegt sich nach links mit der Geschwindigkeit 1. Es bleibt noch, die Cauchy Bedingungen zu verarbeiten:

$$y(x, 0) = y^0 = y_1(x) + y_2(x), \quad y'(x, 0) = y^1 = y_2'(x) - y_1'(x), \quad (1.18)$$

durch Integration dieser Gleichung ergibt sich:

$$\int_{x_0}^x y^1(r) dr = y_2(x) - y_1(x), \quad x_0 \text{ ist eine beliebige Konstante.} \quad (1.19)$$

Damit erhalten wir:

$$2y_1(x) = y^0(x) - \int_{x_0}^x y^1(r) dr, \quad 2y_2(x) = y^0(x) + \int_{x_0}^x y^1(r) dr, \quad (1.20)$$

d.h.:

$$2y_1(x - t) = y^0(x - t) - \int_{x_0}^{x-t} y^1(r) dr, \quad 2y_2(x + t) = y^0(x + t) + \int_{x_0}^{x+t} y^1(r) dr. \quad (1.21)$$

Zusammengefasst erhalten wir die sogenannte d'Alembertsche Lösungsdarstellung:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left(y^0(x - t) + y^0(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} y^1(r) dr \right). \quad (1.22)$$

Regularität

Vorgelegt sei das Cauchy Problem (1.17) mit $y^0 \in C^k(\mathbb{R}^1)$ und $y^1 \in C^{k-1}(\mathbb{R}^1)$. Die Existenz einer Lösung ergibt sich mit der d'Alembertschen Lösungsformel. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass sich die allgemeine Lösung von $y'' - \Delta y = 0$ in der Form $y(x, t) = y_1(x - t) + y_2(x + t)$ darstellen lässt, d.h. das obige Cauchy Problem besitzt genau eine Lösung $y \in C^k(\mathbb{R}^1, [0, \infty))$. Die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten ergibt sich aus der Lösungsdarstellung, also hängt die Lösung stetig von den Anfangsdaten ab, mit anderen Worten, wenn wir y^0 und y^1 bzw. die Räume $C^k(\mathbb{R}^1)$ und $C^{k-1}(\mathbb{R}^1)$ ein wenig ändern, dann ändert sich die Lösung ein wenig in $C^k(\mathbb{R}^1, [0, \infty))$.

Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen $\mathbb{R}^1$

Wir wollen nun die gegebenen Anfangsdaten $y^0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$ und $y^1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$ durch $\bar{y}^0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$ und $\bar{y}^1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$ nur auf einem Intervall $I = [a, b]$ ein wenig stören. Hier interessiert uns wie sich diese Störung fortpflanzt und wann man die Störung in einem

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^1$ spürt, der außerhalb von $[a, b]$ liegt. Dazu studieren wir das Cauchy-Problem:

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{in } I \times [0, \infty), \\ y(0) = \bar{y}^0, y'(0) &= \bar{y}^1 && \text{in } I, \\ \bar{y}^0 = \bar{y}^1 &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \setminus I. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Als Lösung haben wir:

$$\bar{y}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\bar{y}^0(x - t) + \bar{y}^0(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} \bar{y}^1(r) dr \right). \quad (1.24)$$

Es ist natürlich klar, dass für kleine Zeiten in x_0 Ruhe herrscht. Nach der endlichen Zeit $T = \text{dist}(x_0, I)$ spürt man die Störung. Daher spricht man von einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen. Zur Bestimmung von $y(x_0, t_0)$ benötigen wir das Datum y^0 an der Stellen $x_0 - t_0$ und $x_0 + t_0$ und das Datum y^1 im Intervall $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. Deshalb heißt das Intervall $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ Abhängigkeitsgebiet für die Lösung y im Punkt (x_0, t_0) . Der Störungszustand

$$\int_{x-t}^{x+t} y^1(r) dr = \text{const.} \quad (1.25)$$

breitet sich nach links und rechts mit der Geschwindigkeit 1 aus. Nach hinreichend langer Zeit stellt sich an einem Punkt ein konstanter Zustand ein.

Huygens-Prinzip

Das Huygens-Prinzip beschreibt die Existenz einer hinteren Wellenfront, d.h. die Eigenschaft, dass in einem Ortspunkt $x_0 \in \mathbb{R}^1$ nach einer gewissen Zeit $T(x_0)$ wieder Ruhe herrscht, sofern man an der Ausbreitung von Störungen in einem Intervall I interessiert ist. Da für $y(x_0, t_0)$ die Abhängigkeitsmenge $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ ist, kann im Allgemeinen keine hintere Wellenfront beobachtet werden. Gilt aber $y^1 = 0$, dann wird $y(x_0, t_0)$ nur durch $y^0(x_0 - t_0)$ und $y^0(x_0 + t_0)$ bestimmt werden. Somit ist klar, dass ab dem Zeitpunkt $T = \max(x_0 - a_0, b - x_0)$ in x_0 Ruhe herrscht.

Zusammenfassung: Unter der Annahme $y^1 \equiv 0$ gilt das Huygens-Prinzip.

Die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung

Wir betrachten das Cauchy-Problem (1.17) im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$.

Lemma 1 :

Es seien $y^0 \in C^k(\mathbb{R}^3)$ und $y^1 \in C^{k-1}(\mathbb{R}^3)$. Dann besitzt das Cauchy-Problem (1.17) die Lösung $y \in C^k(\mathbb{R}^3, [0, \infty))$. Diese Lösung ist in der Form

$$y(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} y^1(z) d\sigma_z + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} y^0(z) d\sigma_z \right) \quad (1.26)$$

darstellbar. Wobei $S_t(x)$ die Kugeloberfläche einer Kugel, mit einem Zentrum x und dem Radius t , bezeichnet.

Bemerkung 6 :

Im oben genannten Satz haben wir, im Vergleich zum eindimensionalen Fall, keine Eindeutigkeitsaussage. Weiterhin verlieren wir eine Regularitätsordnung, weil die Lösung nur aus dem Raum $C^{k-1}(\mathbb{R}^3, [0, \infty))$ ist.

Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen

Wir betrachten obiges Cauchy-Problem (1.17) mit den Daten y^0 und y^1 , die hinreichend regulär sind und die außerhalb einer Kugel $K_R(x_0)$ um x_0 mit dem Radius R verschwinden.

Wir wollen wissen, zu welche Zeiten gilt $y(x_1, t) = 0$, d.h. wann herrscht in einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ Ruhe. Daher gilt, falls $S_t(x_1) \cap K_R(x_0) = \emptyset$ ist $y(x_1, t) = 0$. Somit liegt x_1 nicht in $K_R(x_0)$, dann gilt $y(x_1, t) = 0$ für $t \leq \text{dist}(x_1, K_R(x_0))$. Damit liegt eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen vor.

Huygens-Prinzip im $\mathbb{R}^3$

Ist x_1 fest und t hinreichend groß $t > T(x_1) = R + |x_1 - x_0|$, dann herrscht in x_1 wieder Ruhe, d.h. $y(x_1, t) = 0$ für $t > T(x_1)$. Also: Die 3-dimensionale Wellengleichung ermöglicht exakte Singnalübertragung und das Abhängigkeitsgebiet von (x_1, t) fällt auf der Anfangsebene im $\mathbb{R}^3$ mit seinem Rand zusammen und es ist eine 2-dimensionale Fläche. Somit erfüllt die 3-dimensionale Wellengleichung das Huygensche Prinzip.

Bemerkung 7 :

Zur Bestimmung von $y(x_0, t_0)$ benötigen wir die Anfangsdaten y^0 und y^1 auf der Kugeloberfläche $S_{t_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| = t_0\}$.

Wellengleichungen in den ungeraden Raumdimensionen

Motiviert durch die Untersuchungen für die Wellengleichungen in Fall 1-d und 3-d wollen wir jetzt das Huygensche Prinzip für den allgemeinen Fall ungerader Raumdimensionen bringen. Dadurch können wir dann mindestens in ungeraden Dimensionen die exakte Steuerbarkeit der Wellengleichung auf dem ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Lemma 2 :

Gegeben seien die Anfangsdaten $y^0 \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ und $y^1 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit $2k = n + 1$ und $n \geq 3$ ungerade. Dann besitzt das Cauchy Problem (1.17) die Lösung $y \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Die Lösung ist in folgender Form darstellbar:

$$y(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{t^{n-2}}{|\partial B|} \int_{\partial B(x, t)} y^0 dS \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{t^{n-2}}{|\partial B|} \int_{\partial B(x, t)} y^1 dS \right) \right],$$

wobei $|\partial B|$ das Lebesguesche Maß von $\partial B(x,t)$ bezeichnet und

$$\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2).$$

Beweis: s. z. B. [18, S. 77]

2 Die exakte Steuerbarkeit der Wellengleichung

2.1 Das Steuerungsproblem, Dirichlet Randwertproblem

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die wesentliche Idee des exakten Steuerungsproblems der Wellengleichung mit Dirichlet Randbedingungen zu formulieren.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, offen und beschränkt mit hinreichend glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Für $T > 0$ betrachten wir im Folgenden die Wellengleichung

$$y'' - c^2 \Delta y = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

mit den zwei Anfangsbedingungen

$$y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

und der inhomogenen Dirichlet-Randbedingung:

$$y = v, \quad \text{auf } \Gamma \times (0, T). \quad (2.3)$$

In (2.1) und (2.2) werden folgende Notationen verwendet:

- Sei $y = y(x, t) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Den Differentialoperator

$$\Delta y := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$$

nennen wir Laplace-Operator oder auch Laplace-Term.

- $y'(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t)$.
- $y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x) \quad \text{in } \Omega$.

In einer physikalischen Interpretation ist y^0 die Anfangsauslenkung, y^1 die Anfangsgeschwindigkeit und die Größe c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (Schallgeschwindigkeit, Lichtgeschwindigkeit). Durch Variablentransformation $t = c\tau$ kann man

$c = 1$ erreichen, was wir häufig zur Verminderung der Schreibarbeit annehmen werden. Entsprechend ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit endlich, daher erfordert die exakte Steuerbarkeit des hyperbolischen Systems (2.1), (2.2), (2.3), dass die Zeit $T > 0$ groß genug sein muss.

Wir betrachten das System:

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y(0) = y^0, y'(0) &= y^1 && \text{in } \Omega, \\ y &= v && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Um die Abhängigkeit der Lösung $y = y(x, t)$ von der Steuerfunktion v kenntlich zu machen, verwenden wir folgende Notation:

$$y = y(x, t; v) = y(v). \quad (2.5)$$

Wir können nun das exakte Steuerungsproblem der Wellengleichung (2.1), (2.2) mit der Dirichlet-Randbedingung (2.3) formulieren:

Es sei $T > 0$ gegeben und seien $\{z^0, z^1\}$ aus einem Hilbertraum H . Für jedes Paar $\{y^0, y^1\} \in H$ ist eine Steuerfunktion v aus einem geeigneten Raum gesucht, sodass: wenn $y = y(v)$ die Lösung von (2.4) ist, dann gilt:

$$y(x, T; v) = z^0(x), \quad y'(x, T; v) = z^1(x) \quad \text{in } \Omega. \quad (2.6)$$

Definition 15 :

Existiert diese Steuerfunktion v , dann heißt das System (2.4) mit $\{y^0, y^1\} \in H$ (exakt) steuerbar zu der Zeit $T > 0$.

Wir wollen das System (2.4) zu der Zeit $T > 0$ steuern. Wobei der Träger der Steuerfunktionen in einer Teilmenge Σ_0 von Σ liegt.

Es sei $\Gamma_0 \subset \Gamma$ offen und nicht leer. Ferner sei

$$y = \begin{cases} v & \text{auf } \Gamma_0, \\ 0 & \text{auf } \Gamma \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

Wir betrachten das System

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y &= \begin{cases} v & \text{auf } \Gamma_0, \\ 0 & \text{auf } \Gamma \setminus \Gamma_0, \end{cases} && \\ y(0) = y^0, y'(0) &= y^1 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Es sei nun $y = y(v)$ die Lösung des Systems (2.7). Unter Berücksichtigung der Linearitätseigenschaft der Wellengleichung lautet das Steuerungsproblem von (2.7) wie folgt:

Es sei $T > 0$ gegeben. Für jedes Paar $\{y^0, y^1\}$ aus einem Hilbertraum H ist eine auf $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$ definierte Steuerfunktion v gesucht, mit der Eigenschaft:

Wenn $y = y(v)$ eine Lösung von (2.7) ist, dann gilt

$$y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Das heißt, wir befassen uns mit der Existenz einer Steuerfunktion v , die das System zu der Zeit $T > 0$ zum Equilibrium $\{0, 0\}$ wiederbringt. Für die Lösbarkeit dieses Problems verwenden wir die HUM-Methode.

2.2 Beschreibung der HUM-Methode in abstrakten Räumen

In diesem Abschnitt werden wir auf die wesentlichen Ideen der HUM-Methode eingehen, mit denen wir das exakte Steuerungsproblem studieren können. Die wesentlichen Punkte der HUM¹ Methode sind, wie folgt:

- Das Erhalten des Eindeutigkeitssatzes.
- Die Konstruktion von Hilberträumen, die zu dem System passend sind.

Wir führen nun die folgenden Schritte der HUM-Methode für die Lösung des exakten Steuerungsproblems des Gleichungssystems (2.7) durch:

Gegeben seien die Anfangsbedingungen $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Wir betrachten die Wellengleichung:

$$\left. \begin{aligned} \phi'' - \Delta \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) &= \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Hier werden wir die Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung (2.8) zeigen und dann lösen wir das duale Problem:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \psi &= \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & \text{auf } \Sigma_0, \\ 0 & \text{auf } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} && \\ \psi(T) = 0, \psi'(T) &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

¹"Hilbert Uniqueness Method" nach J.-L. Lions

Definition 16 :

Ein Problem heißt korrekt gestellt, falls man zeigen kann:

1. Existenz der Lösung.
2. Eindeutigkeit der Lösung.
3. Lösung hängt stetig von den gegebenen Daten ab, z.B.: Randwerten.

Da das System (2.9) eine eindeutige Lösung ψ hat, ist dies ein korrekt gestelltes Problem. Wir definieren einen linearen Operator Λ :

$$\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

und wir betrachten das Skalarprodukt:

$$\langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_{\Omega} (\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0)) dx.$$

Wir multiplizieren (2.9) mit der Lösung $\phi = \phi(x, t)$ von (2.8) und wir integrieren über Q :

$$\int_Q \phi \psi'' dx dt = \int_Q \phi \Delta \psi dx dt. \quad (2.10)$$

Aus der linken Seite der Gleichung (2.10) ergibt sich durch partielle Integration bzgl. t :

$$\begin{aligned} \int_Q \phi \psi'' dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \phi \psi'' dx dt \\ &= \int_{\Omega} \left([\phi \psi']_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi' \psi' dt \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left([\phi \psi']_{t=0}^{t=T} - \left([\phi' \psi]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi'' \psi dt \right) \right) dx \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \phi'' \psi dx dt + \int_{\Omega} ([\phi \psi' - \phi' \psi]_{t=0}^{t=T}) dx \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \phi'' \psi dx dt + \int_{\Omega} \left(\phi(T) \psi'(T) - \phi'(T) \psi(T) - \phi(0) \psi'(0) + \phi'(0) \psi(0) \right) dx, \end{aligned}$$

wegen $\psi(T) = \psi'(T) = 0$, ist dann:

$$\int_Q \phi \psi'' dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \phi'' \psi dx dt + \int_{\Omega} (\phi'(0) \psi(0) - \phi(0) \psi'(0)) dx. \quad (2.11)$$

Unter der Verwendung der 2. Greenschen Formel für ψ und ϕ auf dem rechten Integral der Gleichung (2.10) ergibt sich:

$$\int_Q -\phi \Delta \psi dx dt = \int_{\Sigma} \psi \partial_{\nu} \phi - \phi \partial_{\nu} \psi d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi \Delta \phi dx dt,$$

da $\partial_\nu \psi = 0$, gilt dann:

$$\int_Q -\phi \triangle \psi \, dx dt = \int_\Sigma \psi \partial_\nu \phi \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_\Omega \psi \triangle \phi \, dx dt.$$

Es gilt $\psi = \partial_\nu \phi$ auf Σ_0 , daher erhält man weiter:

$$\int_Q -\phi \triangle \psi \, dx dt = \int_{\Sigma_0} (\partial_\nu \phi)^2 \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_\Omega \psi \triangle \phi \, dx dt. \quad (2.12)$$

Nun addieren wir (2.11) und (2.12):

$$\begin{aligned} \int_Q \phi \psi'' - \phi \triangle \psi \, dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \phi'' \psi \, dx dt - \int_\Omega \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx \\ &\quad + \int_{\Sigma_0} (\partial_\nu \phi)^2 \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_\Omega \psi \triangle \phi \, dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \psi (\phi'' - \triangle \phi) \, dx dt + \int_{\Sigma_0} (\partial_\nu \phi)^2 \, d\Gamma \, dt - \int_\Omega \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx. \end{aligned}$$

Nach (2.8) ist $\phi'' - \triangle \phi = 0$ und somit:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} (\partial_\nu \phi)^2 \, d\Sigma &= \int_\Omega \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx \\ &= \langle \{ \psi'(0), -\psi(0) \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle \\ &= \langle \Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle, \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \phi|^2 \, d\Sigma^2 = \langle \Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle. \quad (2.13)$$

$\forall \{ \phi^0, \phi^1 \} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ betrachten wir folgende quadratische Form:

$$\| \{ \phi^0, \phi^1 \} \|_F := \left(\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \phi|^2 \, d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \| \partial_\nu \phi \|_{L^2(\Sigma_0)}. \quad (2.14)$$

Man kann leicht prüfen, dass die quadratische Form (2.14) eine Seminorm ist. Um zu zeigen, dass (2.14) eine Norm in $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ ist, müssen wir dann zusätzlich die Definitheit zeigen, diese folgt aus folgendem Eindeutigkeitssatz.

² $d\Sigma = d\Gamma \, dt$

Satz 17 :

Erfüllt $\phi = \phi(x, t)$ die Wellengleichung (2.8) mit den Anfangsbedingungen $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ und ist

$$\partial_\nu \phi = 0 \text{ auf } \Sigma_0, \quad (2.15)$$

dann gilt

$$\phi \equiv 0 \text{ in } \Omega \times (0, T).$$

Das Erhalten eines Eindeutigkeitssatzes (17) dieser Art ist der erste wesentliche Punkt der Anwendung der HUM-Methode für die Lösbarkeit des Steuerungsproblems. Der Satz (17) ist ein spezieller Fall aus dem Eindeutigkeitssatz von Holmgren, cf. [21, S. 309], der Satz besagt, dass es ein $T_0 = T_0(\Gamma)$ existiert, sodass für die Lösung $\phi = \phi(x, t)$ der Wellengleichung gilt:

$$\phi = 0 \text{ auf } \Gamma \times (0, T) \Rightarrow \phi \equiv 0 \text{ in } \Omega \times (0, T).$$

Nun wollen wir zeigen, dass der Operator Λ ein Isomorphismus ist. Dadurch können wir später den Raum F charakterisieren. Sei der Hilbertraum F die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm (2.14). Ferner sei $\xi = \xi(x, t)$ die Lösung der Wellengleichung (2.8). Wir betrachten die Anfangsbedingungen $\{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, dann gilt wie oben:

$$\langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \int_{\Sigma} \partial_\nu \phi \partial_\nu \xi \, d\Sigma. \quad (2.16)$$

Nach (2.14) und (2.16) gilt $\forall \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = (\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\})_F, \quad (2.17)$$

wobei $(\cdot, \cdot)_F$ bezeichnet das Skalarprodukt, das die Norm $\|\cdot\|_F$ des Hilbertraums F erzeugt. Weiter gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\left| \int_{\Sigma} \partial_\nu \phi \partial_\nu \xi \, d\Sigma \right| \leq \left(\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \phi|^2 \, d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \xi|^2 \, d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

d.h.: Es gilt für alle $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$

$$|\langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle| \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F \|\{\xi^0, \xi^1\}\|_F. \quad (2.18)$$

Nach der Ungleichung (2.18) kann man auf eine eindeutige Weise den Operator Λ auf einem stetigen linearen Operator von F in der Dualraum F' fortsetzen.

$$\Lambda : F \rightarrow F' \quad (2.19)$$

und nach (2.17) ist für alle $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in F$

$$\langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = (\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\})_F. \quad (2.20)$$

Dies impliziert:

$$\Lambda = \Lambda^*. \quad (2.21)$$

Somit ist Λ ein Isomorphismus von F nach F' . Hier bezeichnet man Λ^* als der zu Λ adjungierte Operator.

Bemerkung 8 :

Wir haben den Raum F und den Operator Λ so gewählt, dass Λ ein Isomorphismus von F nach F' sein muss. Wobei der Startpunkt hier ist der Eindeutigkeitssatz (17).

Da Λ ein Isomorphismus von F nach F' ist, hat folgende Gleichung für alle Anfangsbedingungen $\{y^0, y^1\}$ mit $\{y^1, -y^0\} \in F'$:

$$\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\} \quad (2.22)$$

eine eindeutige Lösung $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$.

Wir wählen die Steuerfunktion v aus:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad \text{auf } \Sigma_0. \quad (2.23)$$

Wobei wir mit ϕ die Lösung von (2.8) bezeichnen, die die Anfangsbedingungen $\{\phi^0, \phi^1\}$ aus der Gleichung (2.22) erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems (2.7) haben wir:

$$y(v) = \psi. \quad (2.24)$$

Hier bezeichnet ψ die Lösung von (2.9). Also, nach der Definition von ψ erfüllt $y = y(v)$ die Bedingung (2.6) und somit haben wir die gesuchte Steuerfunktion v definiert.

Wir fassen das, was wir bis jetzt gezeigt haben, in diesem Satz zusammen.

Satz 18 :

Es sei $T > 0$ und sei der Eindeutigkeitssatz (17) erfüllt. Ferner sei der Raum F die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm:

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F := \left(\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.25)$$

dann existiert für alle Anfangsbedingungen $\{y^0, y^1\}$ mit $\{y^1, -y^0\} \in F'$ eine Steuerfunktion $v \in L^2(\Sigma_0)$, sodass die Lösung des Systems (2.7) die Bedingung (2.6) erfüllt.

2.3 Die exakte Steuerbarkeit in klassischen Räumen

Wir betrachten die inhomogene Wellengleichung

$$\left. \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \theta(0) &= \theta^0, \theta'(0) = \theta^1 && \text{in } \Omega, \\ \theta &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Lemma 3 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand Γ . Für alle $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $\theta^0 \in H_0^1(\Omega)$ und $\theta^1 \in L^2(\Omega)$ existiert eine eindeutige Lösung θ von (2.26) mit:

$$\theta \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.27)$$

Zudem existiert für alle $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ eine Konstante $C > 0$:

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C (|\nabla \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}) \quad (2.28)$$

Beweis: cf. [10]

Lemma 4 :

Es sei $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, dann gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad \text{auf } \Gamma, \quad (2.29)$$

$$|\nabla \phi|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2. \quad (2.30)$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \theta \, d\Gamma \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

Nach der Einbettung $H^m(\Omega) \subset C^2(\overline{\Omega})$ für $m > 2 + \frac{2}{n}$ und nach dem Spursatz existiert $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, mit $T\xi = \theta$, wobei T den Spuroperator bezeichnet.

Wir betrachten nun das Vektorfeld h_k aus dem Lemma (15) und nach dem Gaußschen Satz gilt dann:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi h_j \xi) \right) dx = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi h_j \xi) \, d\Gamma \quad (2.31)$$

Da $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, gilt weiter:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \xi) \right) dx = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (h_j \xi) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (\nu_j \theta) \, d\Gamma.$$

Unter Verwendung des Gausschen Satzes:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \xi) \right) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta \nu_j^2 d\Gamma,$$

durch die Addition von $j = 1$ bis $j = n$, folgt dann die Behauptung:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \theta d\Gamma \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

Zu der zweiten Gleichung haben wir:

$$|\nabla \phi|^2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2.$$

□

Lemma 5 :

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $q = q_k \in (C^1(\overline{\Omega}))^n$, dann gilt für jede schwache Lösung $\theta = \theta(x, t)$ von (2.26), d.h.:

$$\forall \{\theta^0, \theta^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\partial_{\nu} \theta|^2 d\Sigma &= \left[\left(\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2) dx dt \\ &\quad + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx dt - \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Hierbei sei:

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

$$[(u(t), v(t))]_{t=0}^{t=T} := (u(T), v(T)) - (u(0), v(0)) \quad \forall u, v \in C(0, T; L^2(\Omega)),$$

und wir benutzen die Summenkonvention:

$$q_k \nu_k = \sum_{k=1}^n q_k \nu_k.$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der Gleichung (2.32) für eine starke Lösung $\theta = \theta(x, t)$, d.h.:

$$\forall \{\theta^0, \theta^1\} \in (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega), f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Wir multiplizieren die Gleichung (2.26) mit der Funktion:

$$q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$$

und wir integrieren über Q :

$$\int_Q (\theta'' - \triangle \theta) q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt. \quad (2.33)$$

Wir befassen uns zunächst mit dem Integral:

$$I_1 = \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt.$$

Es gilt:

$$\frac{\partial |\theta'|^2}{\partial x_k} = 2 \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k},$$

somit folgt nach der partiellen Integration bez. t :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\left(\int_{\Omega} \theta' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt \\ &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial |\theta'|^2}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned}$$

Wir integrieren nun partiell bez. x und nach der Voraussetzung ist $\theta = 0$ auf Σ , deswegen verschwinden hier die Randwertterme:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2} \int_0^T \left(- \int_{\Omega} |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx \right) dt \\ &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (|\nabla \theta|^2) = 2 |\nabla \theta| \frac{\partial}{\partial x_k} (|\nabla \theta|),$$

unter Verwendung der 1. Greenschen Formel auf dem Integral:

$$I_2 = \int_Q \triangle \theta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} dx dt,$$

ergibt sich sofort :

$$I_2 = \int_{\Sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma - \int_Q \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dx dt.$$

Da $\theta = 0$ auf Σ verschwindet der erste Integral und es gilt:

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \int_Q \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dx dt \\
&= - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dx dt \\
&= - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) dx dt \\
&= - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\nabla \theta|^2) dx dt \\
&= - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\nabla \theta|^2 d\Sigma.
\end{aligned}$$

Nach obigem Lemma gilt weiter:

$$I_2 = - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma.$$

Wir haben gezeigt:

$$\begin{aligned}
\int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt &= I_1 - I_2 \\
&= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx dt \\
&\quad + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma.
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für eine starke Lösung $\theta = \theta(x, t)$ gezeigt. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall für eine schwache Lösung $\theta = \theta(x, t)$, d.h.:

$$\{\theta^0, \theta^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Es sei $\{\theta_n^0, \theta_n^1\} \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ und $f_n \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, sodass:

$$\{\theta_n^0, \theta_n^1\} \longrightarrow \{\theta^0, \theta^1\} \text{ in } H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \quad (2.34)$$

und

$$f_n \longrightarrow f \text{ in } L^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Somit erfüllen die starke Lösungen θ_n die Gleichung (2.32) mit den Anfangsdaten $\{\theta_n^0, \theta_n^1, f_n\}$ und nach der Ungleichung (2.61) und der Eigenschaften (2.34), (2.35) folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\{\theta_n\} \longrightarrow \{\theta\} \text{ in } C(0, T; H_0^1(\Omega))$$

und

$$\{\theta'_n\} \longrightarrow \{\theta'\} \text{ in } C(0, T; L^2(\Omega))$$

Dies erlaubt uns mit dem Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ über die Gleichung (2.32) einzugehen. Daraus folgt dann:

$$q_k \nu_k |\partial_\nu \theta|^2 \in L^1(\Sigma) \quad (2.36)$$

und somit die Behauptung erfüllt. $\square$

Korollar 3 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $q = q_k \in (C^1(\overline{\Omega}))^n$, dann gilt für jede schwache Lösung ϕ von (2.26):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma &= \left[\left(\phi'(t), q_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) dx dt \\ &\quad + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Beweis:

Der Beweis folgt aus der gezeigten Ungleichung (2.32) für $f \equiv 0$. $\square$

Bemerkung 9 :

Ist Ω ein beschränktes Gebiet und konvex, dann bleiben die Gleichungen (2.32) und (2.37) enthalten, weil $-\Delta$ in diesem Fall ein Isomorphismus von $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ist. Im allgemeinen Fall, für Ω offen mit einem Lipschitz-Rand können wir nicht die im Beweis angewendete partielle Integrationen rechtfertigen, weil die starken Lösungen $\theta \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\Delta \theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$ nicht regulär sind. P. Grisvard hat aber in [3] und [4] die Gleichungen (2.32) und (2.37) für ein nicht notwendig konvexes Polygon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beziehungsweise für ein nicht notwendig konvexes Polyeder $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ verallgemeinert.

Lemma 6 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^2$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass es für alle $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ gilt:

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) \left(|\nabla \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right), \quad (2.38)$$

hierbei ist $\theta = \theta(x, t)$ die Lösung von (2.26).

Beweis:

Wir betrachten die Gleichung (2.32) mit $q = h$, wobei h das Vektorfeld aus dem Satz (15) bezeichnet. Wir haben

$$h \cdot \nu \equiv 1 \text{ auf } \Gamma,$$

daher gilt :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma &\leq C(T+1) \left(\|\theta\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|\theta'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + C\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \|\theta\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

und anhand der Abschätzung (2.61) gilt weiter:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma &\leq C(T+1) \left(|\nabla \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} (|\nabla \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}). \end{aligned}$$

Somit:

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) \left(|\nabla \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right).$$

□

Bemerkung 10 :

Nach (2.38) haben die schwachen Lösungen der Wellengleichung die Regularität:

$$\partial_{\nu} \theta \in L^2(\Sigma). \quad (2.39)$$

Wir betrachten die Energiegleichung der Wellengleichung:

$$E(t) = \frac{1}{2} (|\phi'(t)|^2 + |\nabla \phi(t)|^2) \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.40)$$

mit folgenden Notationen:

$$\begin{aligned} |\phi'(t)|^2 &= \|\phi'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\phi'(x, t)|^2 dx, \\ |\nabla \phi(t)|^2 &= \|\nabla \phi(t)\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x, t) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Lemma 7 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Lipschitz-Rand Γ . Ferner sei $\phi = \phi(x, t)$ eine schwache Lösung der Wellengleichung (2.8), dann gilt:

$$E(t) = E_0 = \frac{1}{2} (|\phi^1|^2 + |\nabla \phi^0|^2) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.41)$$

Bemerkung 11 :

Für die schwache Lösung $\phi = \phi(x, t)$ der Wellengleichung gilt:

$$\int_Q (|\phi'(t)|^2 + |\nabla \phi(t)|^2) dx dt = 2T E_0.$$

Korollar 4 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^2$, dann existiert für jede schwache Lösung ϕ von (2.26) eine Konstante $C > 0$:

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) E_0. \quad (2.42)$$

Beweis: Folgt aus (2.26) für $f \equiv 0$. □

Für $x^0 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir folgende Funktion: $m(x) = x - x^0 = (x_k - x_k^0)$ mit den Notationen:

$$\begin{aligned}\Gamma(x^0) &= \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu(x) = m_k(x) \nu_k(x) > 0\}, \\ \Gamma_*(x^0) &= \Gamma \setminus \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma(x^0) &= \Gamma(x^0) \times (0, T), \\ \Sigma_*(x^0) &= \Gamma_*(x^0) \times (0, T).\end{aligned}$$

Zudem bezeichnen wir mit $R(x^0)$ den Radius der kleinsten Kugel von $\mathbb{R}^n$ mit dem Mittelpunkt x_0 , der das Gebiet Ω enthält.

$$R(x^0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} |m(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 \right|^{\frac{1}{2}}, \quad T(x^0) = 2R(x^0)$$

2.4 Die geometrische Interpretation der Menge $\Gamma(x^0)$

Wir reduzieren den allgemeinen Fall auf folgendes Beispiel:

Es sei $\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu(x) = m_k(x) \nu_k(x) > 0\}$ und $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Behauptung: Ist $x^0 \in \Omega$, dann gilt $\Gamma(x^0) = \Gamma$ und $T(x^0) = 4$.

Beweis:

Es sei $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein beliebiger Punkt auf Γ . Wir betrachten die Funktion:

$$m(x) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \text{ hierbei ist } x^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}-m(x) \cdot \nu(x) &= -\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= xx_0 + yy_0 - \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=1} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 \\ &\leq \underbrace{||x^0||}_{<1} \cdot \underbrace{||P||}_{=1} - 1 \\ &< 0\end{aligned}$$

d.h.: $m(x) \cdot \nu(x) > 0$ und da P ein beliebiger Punkt war, folgt daraus die Behauptung $\Gamma(x^0) = \Gamma$. Ferner gilt: $T(x^0) = 2R(x^0) = 2 \underbrace{\max_{x \in \overline{\Omega}} |m(x)|}_{=2} = 4$. $\square$

Für $x^0 = 0$ ist $T(x^0) = 2$, siehe Figure.1 .

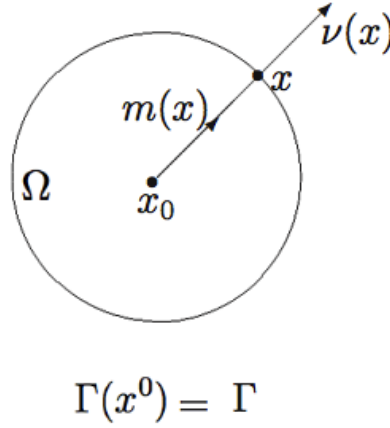


Figure.1

Bemerkung 12 :

C. Bardos, G. Lebeau und J. Rauch haben in [16] gezeigt, dass das System der Wellengleichung für $T < 2$ nicht steuerbar ist.

Lemma 8 :

Für jede schwache Lösung ϕ der Wellengleichung (2.26) gilt :

$$\int_Q |\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 dx dt = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T}. \quad (2.43)$$

Beweis:

Wir multiplizieren die Gleichung (2.26) mit ϕ und wir integrieren über Q :

$$\begin{aligned} \int_Q (\phi'' - \Delta \phi) \phi dx dt &= \int_{\Omega} \left([\phi \phi']_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi' \phi' dt \right) dx - \int_Q (\phi \Delta \phi) dx dt \\ &= \int_{\Omega} \left([\phi \phi']_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi' \phi' dt \right) dx + \int_Q \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx dt - \int_{\Sigma} \phi \partial_{\nu} \phi d\Sigma \\ &= [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T} - \int_Q |\phi'|^2 dx dt + \int_Q |\nabla \phi|^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann: $\int_Q |\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 dxdt = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T}$. □

Bemerkung 13 :

Nach der Cauchy Schwarzschen Ungleichung gilt in $\Sigma(x^0)$:

$$0 \leq m_k \cdot \nu_k \leq \left(\sum_{k=1}^n m_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \nu_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |m(x)| \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)| = R(x^0).$$

Ferner gilt:

$$\int_{\Sigma} m_k \nu_k |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma \leq \int_{\Sigma(x^0)} m_k \nu_k |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma.$$

Satz 19 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^2$. Dann gilt für alle $T > T(x^0)$ und für jede schwache Lösung ϕ der Wellengleichung (2.26):

$$2E_0(T - T(x^0)) \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \quad (2.44)$$

Beweis:

Im Folgenden setzen wir:

$$X = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T}$$

und

$$Y = \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T}.$$

Für $q = m$ liefert die Gleichung (2.37) :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma = Y + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_k} (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) dxdt + \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dxdt.$$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k}{\partial x_k} = n, \quad \frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = |\nabla \phi|^2,$$

daher ergibt sich weiter

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma = Y + \frac{n}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) dxdt + \int_Q |\nabla \phi|^2 dxdt \quad (2.45)$$

und nach der Bemerkung (17):

$$2Y + n \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) dxdt + 2 \int_Q |\nabla \phi|^2 dxdt \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma. \quad (2.46)$$

Nach Lemma (8) und der Bemerkung (11) gilt weiter:

$$\begin{aligned}
2Y + nX + 2 \int_Q |\nabla \phi|^2 dx dt &= 2Y + (n-1)X + X + 2 \int_Q |\nabla \phi|^2 dx dt \\
&= 2Y + (n-1)X + \int_Q |\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 dx dt + 2 \int_Q |\nabla \phi|^2 dx dt \\
&= 2Y + (n-1)X + \int_Q |\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2 dx dt \\
&= 2Y + (n-1)X + 2TE_0 \\
&\leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma,
\end{aligned}$$

d.h.:

$$Y + \frac{(n-1)}{2} X + TE_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma. \quad (2.47)$$

Daher haben wir :

$$\begin{aligned}
Y + \frac{(n-1)}{2} X &= \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{(n-1)}{2} [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T} \\
&= \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}, \phi(t) \right) &= \int_\Omega m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \phi(t) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\phi(t)|^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega |\phi(t)|^2 \frac{\partial m_k}{\partial x_k} dx \\
&= -\frac{n}{2} |\phi(t)|^2.
\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right|^2 &= \left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{(n-1)^2}{4} |\phi(t)|^2 + (n-1) \left(m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k}, \phi(t) \right) \\
&= \left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{(n-1)^2}{4} |\phi(t)|^2 - (n-1) \frac{n}{2} |\phi(t)|^2 \\
&= \left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{1-n^2}{4} |\phi(t)|^2 \\
&\leq \left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 \\
&\leq R^2(x^0) |\nabla \phi(t)|^2,
\end{aligned}$$

d.h.:

$$\left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right|^2 \leq R^2(x^0) |\nabla \phi(t)|^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.48)$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Ungleichung (2.48) liefern weiter:

$$\begin{aligned} \left| \phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right| &\leq \frac{R(x^0)}{2} |\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2R(x^0)} \left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right|^2 \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} |\phi'(t)|^2 + \frac{R^2(x^0)}{2R(x^0)} |\nabla \phi(t)|^2 \\ &= R(x^0) \left(\frac{1}{2} (|\phi'(t)|^2 + |\nabla \phi(t)|^2) \right) = R(x^0) E_0. \end{aligned}$$

$$\left| Y + \frac{(n-1)}{2} X \right| = \left| \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T} \right| \quad (2.49)$$

$$\leq 2 \left\| \left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-1)}{2} \phi(t) \right) \right\|_{L^\infty(0, T)} \quad (2.50)$$

$$\leq 2R(x^0) E_0 = T(x^0) E_0. \quad (2.51)$$

Dies ist äquivalent zu:

$$-T(x^0) E_0 \leq Y + \frac{(n-1)}{2} X \Leftrightarrow T E_0 - T(x^0) E_0 \leq Y + \frac{(n-1)}{2} X + T E_0, \quad (2.52)$$

somit folgt aus der Gleichung (2.47) die Behauptung:

$$(T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma. \quad (2.53)$$

□

Korollar 5 (Eindeutigkeitssatz) :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^2$. Ist ϕ eine schwache Lösung der Wellengleichung (2.26), dann gilt :

$$\partial_\nu \phi = 0 \text{ in } \Sigma(x^0) \Rightarrow \phi \equiv 0 \text{ in } \Omega \times (0, T). \quad (2.54)$$

Beweis:

Folgt aus der Ungleichung (2.53). □

Satz 20 :

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $T > T(x^0)$, dann existiert für jedes Paar $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ eine Steuerfunktion

$$v \in L^2(\Sigma(x^0)),$$

sodass die Lösung $y = y(v)$ des Systems (2.7) die Bedingung:

$$y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

erfüllt.

Beweis:

Nach (5) und (18) haben wir die exakte Steuerbarkeit der Anfangsbedingungen $\{y^0, y^1\}$

$$\{y^1, -y^0\} \in F' \tag{2.55}$$

gezeigt. Wobei F' der Dualraum von F . Hierbei ist F die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm:

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \|\partial_\nu \phi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}. \tag{2.56}$$

Wir kombinieren (4) und (19), dann erhalten wir:

$$\text{Es existieren } C_1, C_2 > 0 : C_1 E_0 \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F^2 \leq C_2 E_0, \tag{2.57}$$

daraus folgt $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ und somit auch $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, d.h.

$$\{y^1, y^0\} \in F' \Leftrightarrow \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \tag{2.58}$$

Die Steuerfunktion ist durch

$$v = \partial_\nu \phi \quad \text{auf } \Sigma(x^0)$$

definiert, wobei ϕ die Lösung von (2.8) mit den Anfangsbedingungen $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ und unter Verwendung der Ungleichung (4) folgt daraus:

$$v \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

□

Lemma 9 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^2$. Für alle $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times$

$L^2(\Sigma)$ existiert eine eindeutige Lösung z von:

$$\left. \begin{aligned} z'' - \Delta z &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ z(0) = z^0, z'(0) &= z^1 && \text{in } \Omega, \\ z &= v && \text{auf } \Gamma \times (0, T), \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

mit :

$$z \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.60)$$

Für alle $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ existiert eine Konstante $C > 0$:

$$\|z'\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|z\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C (|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}). \quad (2.61)$$

Beweis: s. z. B. [16] , [18]

Bemerkung 14 :

In [2] lässt sich weiterhin die höhere Regularität der Lösung bei geeigneten Anfangsbedingungen zeigen. Für Existenz und Regularitätsresultate bezüglich inhomogener Dirichlet-Randbedingungen sei auf Kröner [1] und dort enthaltene Referenzen verwiesen.

Definition 17 :

z ist eine Lösung von (2.59) gdw.

$$\int_Q z f \, dx dt = \langle z^1, \theta(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (z^0, \theta'(0)) - \int_\Sigma v \partial_\nu \theta \, d\Sigma \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q), \quad (2.62)$$

(cf. J. L. Lions und E. Magenes [13])

hierbei ist $\theta = \theta(x, t)$ die Lösung des Problems:

$$\left. \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \theta(T) = \theta^0, \theta'(T) &= \theta^1 && \text{in } \Omega, \\ \theta &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Es geht hier in dieser Definition um die schwache Formulierung von (2.59). Jede reguläre Lösung von (2.59) erfüllt die Eigenschaft (3.31). Man kann das beweisen, indem man (2.63) mit z multipliziert und über Q integriert.

Nun setzen wir die Anfangsdaten $z(0) = z^0, z'(0) = z^1$ mit $z(T) = z^0, z'(T) = z^1$ um. Dann bleiben die Eigenschaften (2.60) und (2.61) des oben genannten Lemmas enthalten, da die Wellengleichung $z'' - \Delta z = 0$ bezüglich der Zeitvariable t reversibel ist. Somit haben wir die Existenz und die Regularität der Lösungen von (2.9) gezeigt.

Bemerkung 15 :

Nach (2.60) hat die Lösung $y = y(v)$ die Eigenschaft:

$$y \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Folgende klassische Methode der exakten Steuerbarkeit der Wellengleichung auf dem ganzen Rand ist von D. L. Russel in [15] gezeigt, welche nur für ungerade Dimensionen anwendbar ist. Wir definieren die Fortsetzung $\{\tilde{y}^0, \tilde{y}^1\}$ der Anfangsbedingung $\{y^0, y^1\}$:

$$\tilde{y}^i = \begin{cases} y^i & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \text{ für } i = 0, 1. \end{cases}$$

Wir betrachten folgendes Cauchy-Problem:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}'' - \Delta \tilde{y} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}^0, \tilde{y}'(0) &= \tilde{y}^1 && \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Nach dem Huygensschen Prinzip existiert $T > 0$ (T hängt nur von Ω ab):

$$\tilde{y} \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \times [T, +\infty[\quad (2.65)$$

und somit bringt die Steuerfunktion für $v = \tilde{y}|_{\Gamma \times]0, T[}$ zur Zeit $T > 0$ die Lösung $y = y(v)$ zum Gleichgewichtszustand $\{0, 0\}$, d.h. :

$$y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [T, +\infty[. \quad (2.66)$$

Die Fortsetzungsmethoden dieser Art sind z. B. von W. Littman [7] entwickelt.

3 Die exakte Randsteuerbarkeit der Bernoulli-Euler Gleichung und der Euler-Poisson-Darboux Gleichung

3.1 Die Bernoulli-Euler Plattengleichung

Das Ziel dieses Abschnittes ist folgenden Steuerbarkeitssatz zu zeigen.

Satz 21 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $T > T(x^0)$, dann existiert für jedes Paar $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ eine Steuerfunktion $v \in L^2(\Sigma(x^0))$, sodass die Lösung $y = y(v)$ von

$$\left. \begin{aligned} y'' + \Delta^2 y &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y(0) &= y^0, \quad y'(0) = y^1 && \text{in } \Omega, \\ y &= 0 && \text{in } \Gamma, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= \begin{cases} v & \text{auf } \Gamma_0, \\ 0 & \text{auf } \Gamma \setminus \Gamma_0, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

die Bedingung: $y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0$ in Ω erfüllt.

Lemma 10 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand Γ . Ferner betrachten wir das inhomogene Problem

$$\left. \begin{aligned} \theta'' + \Delta^2 \theta &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \theta(0) &= \theta^0, \quad \theta'(0) = \theta^1 && \text{in } \Omega, \\ \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Dann existiert für alle $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $\theta^0 \in H_0^2(\Omega)$ und $\theta^1 \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung θ von (3.2) mit:

$$\theta \in C(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.3)$$

Zudem existiert für alle $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ eine Konstante $C > 0$:

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))} + \|\theta'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C (|\Delta\theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}). \quad (3.4)$$

Lemma 11 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^3$. Ferner sei $q = q_k \in (W^{2, \infty}(\Omega))^n$, dann gilt für jede schwache Lösung $\theta = \theta(x, t)$ (d.h. : $\forall \{\theta^0, \theta^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$) von (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\Delta\theta|^2 d\Sigma &= \left[\left(\theta'(t), q_k \frac{\partial\theta(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\theta'|^2 - |\Delta\theta|^2) dxdt \\ &+ 2 \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \Delta\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} dxdt + \int_Q \Delta q_k \Delta\theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dxdt - \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt \end{aligned} \quad (3.5)$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der Gleichung (3.5) für eine starke Lösung $\theta = \theta(x, t)$, d.h.:

$$\forall \{\theta^0, \theta^1\} \in (H^3 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega), f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.6)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (3.2) mit der Funktion

$$q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$$

und wir integrieren über Q :

$$\int_Q (\theta'' + \Delta^2 \theta) q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt = \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt. \quad (3.7)$$

Wir befassen uns zunächst mit dem Integral:

$$I_1 = \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt.$$

Wegen

$$\frac{\partial |\theta'|^2}{\partial x_k} = 2 \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}$$

und nach der partiellen Integration bez. t gilt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\left(\int_{\Omega} \theta' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dxdt \\ &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial |\theta'|^2}{\partial x_k} dxdt, \end{aligned}$$

wir integrieren nun partiell bez. x und nach der Voraussetzung ist $\theta = 0$ auf Σ , deswegen verschwinden hier die Randwertterme

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2} \int_0^T \left(- \int_{\Omega} |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx \right) dt \\
&= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx dt.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (|\Delta \theta|^2) = 2 |\Delta \theta| \frac{\partial}{\partial x_k} (|\Delta \theta|), \quad (3.8)$$

$$\Delta \left(q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} \right) = \Delta q_k \left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} \right) + 2 \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} + q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial q_k}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} \right) + q_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial x_k} = q_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial x_k} \quad \text{auf } \Sigma. \quad (3.10)$$

Da $\theta \in H_0^2(\Omega)$ gilt nach Lemma (4) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \nu_k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \quad \text{auf } \Sigma.$$

Somit ist:

$$\Delta \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu^2}, \quad (3.11)$$

d.h.:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial x_k} = \nu_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu^2} = \nu_k \Delta \theta \quad \text{auf } \Sigma. \quad (3.12)$$

Unter Verwendung der 1. Greenschen Formel auf dem Integral

$$I_2 = \int_Q \Delta^2 \theta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} dx dt, \quad (3.13)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma - \int_Q \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dx dt \\
&= \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma - \int_{\Sigma} \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \nu} \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dx dt + \int_Q \Delta \theta \Delta \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dx dt.
\end{aligned}$$

da $\theta = 0$ auf Σ , verschwindet das erste Integral. Nach (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) gilt weiter:

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \int_{\Sigma} \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \nu} \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dxdt + \int_Q \Delta \theta \Delta \left(q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) dxdt \\
&= \int_Q \left(\Delta \theta \Delta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} + 2 \Delta \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} + q_k \Delta \theta \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} \right) dxdt - \int_{\Sigma} q_k \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial x_k} dxdt \\
&= \int_Q \left(\Delta \theta \Delta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} + 2 \Delta \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{q_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (|\Delta \theta|^2) \right) dxdt - \int_{\Sigma} q_k \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial x_k} dxdt \\
&= \int_Q \left(\Delta \theta \Delta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} + 2 \Delta \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\Delta \theta|^2 \right) dxdt \\
&\quad - \int_{\Sigma} \left(q_k \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial x_k} - \frac{q_k}{2} \nu_k |\Delta \theta|^2 \right) d\Sigma \\
&= \int_Q \left(\Delta \theta \Delta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} + 2 \Delta \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\Delta \theta|^2 \right) dxdt - \int_{\Sigma} \frac{q_k}{2} \nu_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma.
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt:

$$\begin{aligned}
\int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(\Delta \theta \Delta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} + 2 \Delta \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\Delta \theta|^2 \right) dxdt \\
&\quad - \int_{\Sigma} \frac{q_k}{2} \nu_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma,
\end{aligned}$$

d.h.:

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \frac{q_k}{2} \nu_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} - \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt \\
&\quad + \int_Q \left(\Delta \theta \Delta q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} + 2 \Delta \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\theta'|^2 - |\Delta \theta|^2) \right) dxdt.
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für die starke Lösung $\theta = \theta(x, t)$ gezeigt. $\square$

Lemma 12 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^3$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$:

$$\int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 d\Sigma \leq C \left(|\Delta \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right), \quad (3.14)$$

hierbei ist $\theta = \theta(x, t)$ die Lösung von (3.2).

Beweis:

Wir betrachten die Gleichung (3.5) mit $q = h$, wobei h das Vektorfeld aus dem Satz (16) bezeichnet, mit $0 < k \leq h \cdot \nu$ auf Γ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 d\Sigma &\leq C \left(\|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))}^2 + \|\theta'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

und anhand der Abschätzung (3.4) gilt weiter:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 d\Sigma &\leq C (|\Delta \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}) \\ &\quad + C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} (|\Delta \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}). \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\int_{\Sigma} |\Delta \theta|^2 d\Sigma \leq C (|\Delta \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}), \quad \text{mit } C = C(\|h\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}).$$

□

Wir betrachten das homogene Problem:

$$\left. \begin{aligned} \phi'' + \Delta^2 \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) &= \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

und dazu die Energiegleichung:

$$E(t) = \frac{1}{2} (|\phi'(t)|^2 + |\Delta \phi(t)|^2) = \int_{\Omega} |\phi'(x,t)|^2 + |\Delta \phi(x,t)|^2 dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.16)$$

Lemma 13 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Lipschitz-Rand Γ . Ferner sei $\phi = \phi(x, t)$ eine schwache Lösung von (3.15), dann gilt:

$$E(t) = E_0 = \frac{1}{2} (|\phi^1|^2 + |\Delta \phi^0|^2) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.17)$$

Bemerkung 16 :

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und konvexes Gebiet, dann ist der Operator Δ^2 , ohne andere Regularitätsvoraussetzung auf dem Rand Γ , ein Isomorphismus von $H^3 \cap H_0^2(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$, cf. [5].

Korollar 6 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^3$. Dann existiert für jede schwache Lösung ϕ von (3.15) eine Konstante $C > 0$:

$$\int_{\Sigma} |\Delta \phi|^2 d\Sigma \leq C E_0. \quad (3.18)$$

Beweis: Folgt aus (3.14) für $f = 0$. □

Lemma 14 :

Für jede schwache Lösung ϕ von (3.15) gilt:

$$\int_Q |\phi'|^2 - |\Delta \phi|^2 dxdt = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T}. \quad (3.19)$$

Beweis:

Wir multiplizieren die Gleichung (3.15) mit ϕ und wir integrieren über Q :

$$\int_Q (\phi'' + \Delta^2 \phi) \phi dxdt = \int_{\Omega} \left([\phi \phi']_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi' \phi' dt \right) dx + \int_Q (\phi \Delta^2 \phi) dxdt$$

und unter Verwendung der 1. Greenschen Formel gilt dann

$$\begin{aligned} \int_Q \phi \Delta^2 \phi dxdt &= - \int_Q \nabla(\Delta \phi) \cdot \nabla \phi dxdt + \int_{\Sigma} \phi \partial_{\nu}(\Delta \phi) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} \phi \partial_{\nu}(\Delta \phi) d\Sigma - \int_{\Sigma} \Delta \phi \partial_{\nu} \phi d\Sigma + \int_Q |\Delta \phi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Wegen $\phi = \partial_{\nu} \phi = 0$ auf Σ , gilt weiter:

$$\int_Q \phi \Delta^2 \phi dxdt = \int_Q |\Delta \phi|^2 dxdt.$$

Daraus folgt dann:

$$\int_Q (\phi'' + \Delta^2 \phi) \phi dxdt = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T} - \int_Q |\phi'|^2 dxdt + \int_Q |\Delta \phi|^2 dxdt$$

und somit gilt die Behauptung:

$$\int_Q |\phi'|^2 - |\Delta \phi|^2 dxdt = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T}.$$

□

Bemerkung 17 :

Nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt auf $\Sigma(x^0)$:

$$0 \leq m_k \cdot \nu_k \leq \left(\sum_{k=1}^n m_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \nu_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |m(x)| \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)| = R(x^0)$$

und somit gilt auch:

$$\int_{\Sigma} m_k \nu_k |\Delta \phi|^2 d\Sigma \leq \int_{\Sigma(x^0)} m_k \nu_k |\Delta \phi|^2 d\Sigma \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \phi|^2 d\Sigma.$$

Satz 22 :

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^3$. Dann gilt für alle $T > T(x^0)$ und für jede schwache Lösung ϕ von (3.15):

$$4E_0 (T - T(x^0)) \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \phi|^2 d\Sigma. \quad (3.20)$$

Beweis:

Wir setzen:

$$X = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T} \quad \text{und} \quad Y = \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T}.$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.5) gilt für $q = m$ und $f = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m_k \nu_k |\Delta \phi|^2 d\Sigma &= \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_k} (|\phi'|^2 - |\Delta \phi|^2) dxdt \\ &\quad + 2 \int_Q \Delta \phi \frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} dxdt + \int_Q \Delta m_k \Delta \phi \frac{\partial m_k}{\partial x_j} dxdt. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k}{\partial x_k} = n,$$

gilt weiter:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} m_k \nu_k |\Delta \phi|^2 d\Sigma = Y + \frac{n}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\Delta \phi|^2) dxdt + 2 \int_Q |\Delta \phi|^2 dxdt. \quad (3.21)$$

Nach der Bemerkung (17):

$$2Y + n \int_Q (|\phi'|^2 - |\Delta \phi|^2) dxdt + 4 \int_Q |\Delta \phi|^2 dxdt \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \phi|^2 d\Sigma. \quad (3.22)$$

Nach Lemma (14) und der Bemerkung (11) gilt weiter:

$$\begin{aligned}
2Y + nX + 4 \int_Q |\Delta\phi|^2 dx dt &= 2Y + (n-2)X + 2X + 4 \int_Q |\Delta\phi|^2 dx dt \\
&= 2Y + (n-2)X + 2 \int_Q |\phi'|^2 - |\Delta\phi|^2 dx dt + 4 \int_Q |\Delta\phi|^2 dx dt \\
&= 2Y + (n-2)X + 2 \int_Q |\phi'|^2 + |\Delta\phi|^2 dx dt \\
&= 2Y + (n-2)X + 4TE_0 \\
&\leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta\phi|^2 d\Sigma,
\end{aligned}$$

d.h.:

$$Y + \frac{(n-2)}{2} X + 2TE_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta\phi|^2 d\Sigma. \quad (3.23)$$

Wir haben:

$$\begin{aligned}
Y + \frac{(n-2)}{2} X &= \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{(n-2)}{2} [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T} \\
&= \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left(m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}, \phi(t) \right) &= \int_{\Omega} m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} \phi(t) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\phi(t)|^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\phi(t)|^2 \frac{\partial m_k}{\partial x_k} dx \\
&= -\frac{n}{2} |\phi(t)|^2.
\end{aligned}$$

Somit gilt auch:

$$\begin{aligned}
\left| m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right|^2 &= \left| m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{(n-2)^2}{4} |\phi(t)|^2 + (n-2) \left(m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k}, \phi(t) \right) \\
&= \left| m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{(n-2)^2}{4} |\phi(t)|^2 - (n-2) \frac{n}{2} |\phi(t)|^2 \\
&= \left| m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{4-n^2}{4} |\phi(t)|^2 \\
&\leq \left| m_k \frac{\partial\phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 \\
&\leq R^2(x^0) |\nabla\phi(t)|^2.
\end{aligned}$$

Wir betrachten folgendes Problem:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u &= -\lambda_0^2 \Delta u \quad \text{in } \Omega, \\ u &\in H_0^2(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Hier bezeichnet λ_0^2 den ersten Eigenwert des Problems (3.24) mit:

$$\lambda_0^2 = \min_{u \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\Delta u|^2}{|\nabla u|^2}, \quad (3.25)$$

dann gilt:

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{\Delta u}{\lambda_0} \quad \forall u \in H_0^2(\Omega). \quad (3.26)$$

Nach der Abschätzung (3.26) gilt dann für alle $t \in [0, T]$:

$$\left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right|^2 \leq R^2(x^0) |\nabla \phi(t)|^2 \leq \frac{R^2(x^0)}{\lambda_0^2} |\Delta \phi(t)|^2 \quad (3.27)$$

und nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der Ungleichung (3.27) gilt weiter:

$$\begin{aligned} \left| \left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right) \right| &\leq \frac{R(x^0)}{2} |\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2R(x^0)} \left| m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right|^2 \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2\lambda_0} |\phi'(t)|^2 + \frac{R^2(x^0)}{2\lambda_0 R(x^0)} |\Delta \phi(t)|^2 \\ &= \frac{R(x^0)}{\lambda_0} \left(\frac{1}{2} (|\phi'(t)|^2 + |\Delta \phi(t)|^2) \right) = \frac{R(x^0)}{\lambda_0} E_0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| Y + \frac{(n-2)}{2} X \right| &= \left| \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T} \right| \\ &\leq 2 \left\| \left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{(n-2)}{2} \phi(t) \right) \right\|_{L^\infty(0,T)} \\ &\leq 2 \frac{R(x^0)}{\lambda_0} E_0 = 2T(x^0) E_0. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$-2T(x^0) E_0 \leq Y + \frac{(n-1)}{2} X \Leftrightarrow 2T E_0 - 2T(x^0) E_0 \leq Y + \frac{(n-1)}{2} X + 2T E_0,$$

somit folgt aus der Gleichung (3.23) die Behauptung:

$$4 E_0 (T - T(x^0)) \leq 2Y + (n-1) X + 4T E_0 \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \phi|^2 d\Sigma.$$

□

Korollar 7 (Eindeutigkeitssatz) :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^3$. Ist ϕ eine schwache Lösung von (3.15) und

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{auf } \Sigma(x^0),$$

dann ist $\phi \equiv 0$.

Beweis:

Folgt aus dem Satz (22). □

J. L. Lions hat in [6] den Satz (22) für alle $T > T(x^0) + \frac{|n-2|}{2\mu_0}$ bewiesen, wobei hier μ_0^2 den ersten Eigenwert von Δ^2 in Ω bezeichnet. E. Zuazua hat aber in [16] den Eindeutigkeitssatz (7) für alle $T > 0$ gezeigt, somit gilt die Abschätzung aus dem Satz (22) für alle $T > 0$.

3.2 Die Existenz und die Regularität der Lösungen

Wir wollen zunächst die Existenz und die Regularität des folgenden Problems studieren. Es sei:

$$\left. \begin{aligned} z'' + \Delta^2 z &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ z(0) = z^0, z'(0) &= z^1 && \text{in } \Omega, \\ z = 0, \frac{\partial z}{\partial \nu} &= v && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Lemma 15 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^3$. Für alle $v \in L^2(\Sigma)$, $z^1 \in H^{-2}(\Omega)$ und $z^0 \in L^2(\Omega)$, existiert eine eindeutige Lösung z von (3.28) mit:

$$z \in C(0, T; H^{-2}(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.29)$$

Zudem existiert für alle $\{z^1, z^0, v\} \in H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ eine Konstante $C > 0$:

$$\|z\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega))} \leq C(|z^0| + \|z^1\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}). \quad (3.30)$$

Beweis: s. z. B [16]

Definition 18 :

z ist eine Lösung von (3.28) gdw.

$$\int_Q z f \, dx dt = \langle z^1, \theta(0) \rangle_{H^{-2}(\Omega), H_0^2(\Omega)} - (z^0, \theta'(0)) - \int_\Sigma v \Delta \theta \, d\Sigma \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q), \quad (3.31)$$

wobei $\theta = \theta(x, t)$ die Lösung des folgenden Problems bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \theta'' - \Delta^2 \theta &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \theta(T) = \theta^0, \theta'(T) &= \theta^1 && \text{in } \Omega, \\ \theta = \partial_\nu \theta &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Aufgrund der Reversibilität der Gleichung bzgl. t können wir die Anfangsdaten $z(0) = z^0, z'(0) = z^1$ mit den Enddaten $z(T) = z^0, z'(T) = z^1$ umsetzen.

Nun können wir den Satz (21) unter Verwendung der HUM-Methode beweisen.

Beweis:

Wir lösen zunächst das homogene Problem (3.15) mit den Anfangsbedingungen $\phi^0, \phi^1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, d.h.:

$$\left. \begin{aligned} \phi'' + \Delta^2 \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) &= \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Nach der Ungleichung (6) gilt:

$$\Delta \phi \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

Es sei nun

$$\left. \begin{aligned} \psi'' + \Delta^2 \psi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} &= \begin{cases} \Delta \phi & \text{auf } \Sigma_0, \\ 0 & \text{auf } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} && \\ \psi(T) = 0, \psi'(T) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \psi &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Nach Lemma (3.29) existiert eine eindeutige Lösung $\psi = \psi(x, t)$ von (3.34) mit der Eigenschaft:

$$\psi \in C(0, T; H^{-2}(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.35)$$

Nun definieren wir den linearen Operator Λ :

$$\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

und wir betrachten das Skalarprodukt:

$$\langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_{\Omega} \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx.$$

Wir multiplizieren (3.34) mit der Lösung $\phi = \phi(x, t)$ von (3.15) und wir integrieren über Q :

$$\int_Q \phi \psi'' dx dt = - \int_Q \phi \Delta^2 \psi dx dt. \quad (3.36)$$

Aus der linken Seite der Gleichung (3.36) ergibt sich durch partielle Integration bzgl. t :

$$\begin{aligned}
\int_Q \phi \psi'' dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \phi \psi'' dx dt \\
&= \int_{\Omega} \left([\phi \psi']_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi' \psi' dt \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left([\phi \psi']_{t=0}^{t=T} - \left([\phi' \psi]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi'' \psi dt \right) \right) dx \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \phi'' \psi dx dt + \int_{\Omega} ([\phi \psi' - \phi' \psi]_{t=0}^{t=T}) dx \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \phi'' \psi dx dt + \int_{\Omega} \left(\phi(T) \psi'(T) - \phi'(T) \psi(T) - \phi(0) \psi'(0) + \phi'(0) \psi(0) \right) dx.
\end{aligned}$$

Wegen $\psi(T) = \psi'(T) = 0$, ist dann:

$$\int_Q \phi \psi'' dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \phi'' \psi dx dt + \int_{\Omega} \left(\phi'(0) \psi(0) - \phi(0) \psi'(0) \right) dx \quad (3.37)$$

und unter der Verwendung der 2. Greenschen Formel für ψ und ϕ auf dem rechten Integral der Gleichung (3.36) ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}
- \int_Q \phi \Delta^2 \psi dx dt &= \int_{\Sigma} \Delta \psi \partial_{\nu} \phi - \phi \partial_{\nu} (\Delta \psi) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \psi \Delta \phi dx dt \\
&= \int_{\Sigma} \Delta \psi \partial_{\nu} \phi - \phi \partial_{\nu} (\Delta \psi) d\Gamma dt - \int_{\Sigma} \Delta \phi \partial_{\nu} \psi - \psi \partial_{\nu} (\Delta \phi) d\Gamma dt \\
&\quad - \int_Q \psi \Delta^2 \phi dx dt.
\end{aligned}$$

Da $\partial_{\nu} \psi = 0$ auf $\Sigma \setminus \Sigma_0$ und $\partial_{\nu} \psi = \Delta \phi$ auf Σ_0 , gilt dann :

$$\int_Q \phi \Delta^2 \psi dx dt = \int_Q \psi \Delta^2 \phi dx dt + \int_{\Sigma_0} |\Delta \phi|^2 d\Gamma dt. \quad (3.38)$$

Nun addieren wir (3.37) und (3.38):

$$\begin{aligned}
\int_Q \phi \psi'' + \phi \Delta^2 \psi dx dt &= \int_Q \phi'' \psi dx dt - \int_{\Omega} \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx \\
&\quad + \int_{\Sigma_0} |\Delta \phi|^2 d\Gamma dt + \int_Q \psi \Delta^2 \phi dx dt \\
&= \int_Q \psi (\phi'' - \Delta^2 \phi) dx dt + \int_{\Sigma_0} |\Delta \phi|^2 d\Gamma dt - \int_{\Omega} \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx.
\end{aligned}$$

Wegen $\phi'' + \Delta^2 \phi = 0$ in Q , gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} |\Delta \phi|^2 d\Gamma dt &= \int_{\Omega} \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx \\ &= \langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle \\ &= \langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\int_{\Sigma_0} |\Delta \phi|^2 d\Gamma dt = \langle \Lambda \{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle. \quad (3.39)$$

$\forall \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ sei nun:

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F := \left(\int_{\Sigma_0} |\Delta \phi|^2 d\Gamma dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|\Delta \phi\|_{L^2(\Sigma_0)}, \quad (3.40)$$

nach Korollar (7) ist (3.40) eine Norm in $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Nun wollen wir den Hilbertraum F (der Vervollständigungsraum von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm (3.40)) konstruieren. Nach der Ungleichung (6) und dem Satz (22) folgt dann:

$$F = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Aus (3.39) folgt, dass Λ ein Isomorphismus von F nach F' ist und somit:

$$F' = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Daher haben wir nach der HUM-Methode die exakte Steuerbarkeit der Anfangsbedingungen $\{y^1, -y^0\} \in F'$ mit der Steuerfunktion $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ gegeben durch

$$v = \Delta \phi \quad \text{auf } \Sigma_0.$$

Hier bezeichnet ϕ die Lösung von (3.15) mit den Anfangsdaten $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$, wobei ϕ^0 und ϕ^1 folgende Bedingung erfüllen:

$$\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}.$$

□

3.3 Euler-Poisson-Darboux Gleichung

Wir betrachten das System:

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y + \frac{\lambda}{t} y' &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y(0) = y^0, y'(0) &= y^1 && \text{in } \Omega, \\ y &= v && \text{auf } \Gamma \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Das exakte Steuerungsproblem der EPD-Gleichung:

Es sei $T > 0$ gegeben und seien $\{z^0, z^1\}$ aus einem Hilbertraum H . Für jedes Paar $\{y^0, y^1\} \in H$ ist eine Steuerfunktion v aus einem geeigneten Raum gesucht, sodass: wenn $y = y(v)$ die Lösung des Systems (3.41) ist, dann gilt:

$$y(x, T; v) = z^0(x), \quad y'(x, T; v) = z^1(x) \quad \text{in } \Omega. \quad (3.42)$$

Definition 19 :

Existiert diese Steuerfunktion v , dann heißt das System (3.41) mit $\{y^0, y^1\} \in H$ (exakt) steuerbar zu der Zeit $T > 0$.

Wir wollen das System (3.41) zu der Zeit $T > 0$ (T groß genug) steuern. Bei $t = 0$ taucht aber eine Singularität auf, somit gibt es mit dem Anfangswertproblem große Schwierigkeiten. Um diese Singularität auszuschalten, starten wir mit einer Zeit $t = t_0$ um die Steuerung für groß $T > 0$ zu erreichen.

Es sei $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ offen und nicht leer. Ferner sei

$$y = \begin{cases} v & \text{auf } \Gamma_0, \\ 0 & \text{auf } \Gamma \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

Wir betrachten das System:

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y + \frac{\lambda}{t} y' &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y &= \begin{cases} v & \text{auf } \Gamma_0, \\ 0 & \text{auf } \Gamma \setminus \Gamma_0, \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) &= y^1 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Gegeben seien die Anfangsbedingungen $\{\phi(t_0), \phi'(t_0)\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Wir betrachten folgendes System:

$$\left. \begin{aligned} \phi'' - \Delta \phi - \left(\frac{\lambda}{t} \phi\right)' &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(t_0) = \phi^0, \phi'(t_0) &= \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Hier spielt ϕ die Rolle einer Hilfsgröße, um die Randsteuerung zu konstruieren.

Sei nun:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi + \frac{\lambda}{t} \psi' &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \psi &= \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & \text{auf } \Sigma_0, \\ 0 & \text{auf } \Sigma \setminus \Sigma_0, \end{cases} \\ \psi(T) = 0, \psi'(T) &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Bemerkung 18 :

Das System (3.45) hat eine eindeutige Lösung für $\lambda \geq 0$. Ist $\lambda \leq 0$, dann ist die Eindeutigkeit der Lösung verletzt. Beispiel: Für $\lambda = -1$, sind $\psi(x, t) = t^2$ und $\psi(x, t) \equiv 0$ im Inneren zwei verschiedene Lösungen von (3.45).

Es sei $t_0 > 0$. Wir definieren einen linearen Operator Λ :

$$\Lambda \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} = \{ \psi'(t_0) + \frac{\lambda}{t_0} \psi(t_0), -\psi(t_0) \}$$

und wir betrachten das Skalarprodukt:

$$\langle \{ \psi'(t_0) + \frac{\lambda}{t_0} \psi(t_0), -\psi(t_0) \}, \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} \rangle = \int_{\Omega} \left(\phi(t_0) \left(\psi'(t_0) + \frac{\lambda}{t_0} \psi(t_0) \right) - \phi'(t_0) \psi(t_0) \right) dx.$$

Wir multiplizieren (3.45) mit der Lösung $\phi = \phi(x, t)$ von (3.44) und wir integrieren über $Q = \Omega \times [t_0, T]$:

$$\int_Q \phi \psi'' + \frac{\lambda}{t} \phi \psi' dx dt = \int_Q \phi \Delta \psi dx dt \quad (3.46)$$

Aus der linken Seite der Gleichung (3.46) ergibt sich durch partielle Integration bzgl. t :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q \phi \psi'' + \frac{\lambda}{t} \phi \psi' dx dt \\ &= \int_{\Omega} \left([\phi \psi']_{t=t_0}^{t=T} - \int_{t_0}^T \phi' \psi' dt + \left[\frac{\lambda}{t} \phi \psi \right]_{t=t_0}^{t=T} - \int_{t_0}^T \psi \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' dt \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left([\phi \psi']_{t=t_0}^{t=T} - \left([\phi' \psi]_{t=t_0}^{t=T} - \int_{t_0}^T \phi'' \psi dt \right) \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\left[\frac{\lambda}{t} \phi \psi \right]_{t=t_0}^{t=T} - \int_{t_0}^T \psi \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' dt \right) dx \\ &= \int_Q \phi'' \psi - \psi \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' dx dt + \int_{\Omega} \left([\phi \psi' - \phi' \psi + \frac{\lambda}{t} \phi \psi]_{t=t_0}^{t=T} \right) dx \\ &= \int_Q \psi \left(\phi'' - \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' \right) dx dt + \int_{\Omega} \left(\phi(T) \psi'(T) - \phi'(T) \psi(T) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{T} \phi(T) \psi(T) - \phi(t_0) \psi'(t_0) + \phi'(t_0) \psi(t_0) - \frac{\lambda}{t_0} \phi(t_0) \psi(t_0) \right) dx. \end{aligned}$$

Wegen $\psi(T) = \psi'(T) = 0$, ist dann:

$$I_1 = \int_Q \psi \left(\phi'' - \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' \right) dx dt + \int_{\Omega} \left(-\phi(t_0) \psi'(t_0) + \phi'(t_0) \psi(t_0) - \frac{\lambda}{t_0} \phi(t_0) \psi(t_0) \right) dx. \quad (3.47)$$

Unter der Verwendung der 2. Greenschen Formel für ψ und ϕ auf dem rechten Integral der Gleichung (3.46) ergibt sich:

$$I_2 = \int_Q -\phi \Delta \psi \, dx dt = \int_{\Sigma} \psi \partial_{\nu} \phi - \phi \partial_{\nu} \psi \, d\Gamma \, dt - \int_{Q_{t_0}} \psi \Delta \phi \, dx dt$$

und wegen $\phi = 0$, gilt dann:

$$I_2 = \int_{\Sigma} \psi \partial_{\nu} \phi \, d\Gamma \, dt - \int_Q \psi \Delta \phi \, dx dt.$$

Da $\psi = \partial_{\nu} \phi$ auf Σ_0 , erhält man weiter:

$$I_2 = \int_Q -\phi \Delta \psi \, dx dt = \int_{\Sigma_0} |\partial_{\nu} \phi|^2 \, d\Gamma \, dt - \int_Q \psi \Delta \phi \, dx dt. \quad (3.48)$$

Nun addieren wir (3.47) und (3.48):

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_Q \phi \left(\psi'' - \Delta \psi + \frac{\lambda}{t} \psi' \right) \, dx dt \\ &= \int_Q \psi \left(\phi'' - \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' \right) \, dx dt - \int_Q \psi \Delta \phi \, dx dt + \int_{\Sigma_0} (\partial_{\nu} \phi)^2 \, d\Gamma \, dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(-\phi(t_0) \psi'(t_0) + \phi'(t_0) \psi(t_0) - \frac{\lambda}{t_0} \phi(t_0) \psi(t_0) \right) \, dx \\ &= \int_Q \psi \left(\phi'' - \Delta \phi - \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' \right) \, dx dt + \int_{\Sigma_0} (\partial_{\nu} \phi)^2 \, d\Gamma \, dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(-\phi(t_0) \psi'(t_0) + \phi'(t_0) \psi(t_0) - \frac{\lambda}{t_0} \phi(t_0) \psi(t_0) \right) \, dx \\ &= \int_Q \psi \left(\phi'' - \Delta \phi - \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' \right) \, dx dt + \int_{\Omega} \left(\phi'(t_0) \psi(t_0) - \phi(t_0) \left(\psi'(t_0) + \frac{\lambda}{t_0} \psi(t_0) \right) \right) \, dx \\ &\quad + \int_{\Sigma_0} (\partial_{\nu} \phi)^2 \, d\Gamma \, dt. \end{aligned}$$

Nach (3.44) ist $\phi'' - \Delta \phi - \left(\frac{\lambda}{t} \phi \right)' = 0$ und somit gilt weiter:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} |\partial_{\nu} \phi|^2 \, d\Sigma &= \int_{\Omega} \left(\phi(t_0) \left(\psi'(t_0) + \frac{\lambda}{t_0} \psi(t_0) \right) - \phi'(t_0) \psi(t_0) \right) \, dx \\ &= \langle \{ \psi'(t_0) + \frac{\lambda}{t_0} \psi(t_0), -\psi(t_0) \}, \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} \rangle \\ &= \langle \Lambda \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \}, \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma = \langle \Lambda \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \}, \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} \rangle. \quad (3.49)$$

$\forall \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ betrachten wir folgende quadratische Form:

$$\| \{ \phi(t_0), \phi'(t_0) \} \|_F := \left(\int_{\Sigma_0} |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \| \partial_\nu \phi \|_{L^2(\Sigma_0)}. \quad (3.50)$$

Wir betrachten das inhomogene System:

$$\left. \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta + \frac{\lambda}{t} \theta' &= f && \text{in } Q, \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) &= \theta^1 && \text{in } \Omega, \\ \theta &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Lemma 16 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $q = q_k \in C^1((\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$, dann gilt für jede schwache Lösung $\theta = \theta(x, t)$ (d.h. : $\forall \{ \theta^0, \theta^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$) von (3.51):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k |\partial_\nu \theta|^2 d\Sigma &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx dt \\ &+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt \\ &+ \int_Q \frac{\lambda}{t} \theta' H_k dx dt + \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt \end{aligned} \quad (3.52)$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der Gleichung (3.52) für eine starke Lösung $\theta = \theta(x, t)$ d.h.:

$$\forall \{ \theta^0, \theta^1 \} \in (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega), f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Wir multiplizieren die Gleichung (3.51) mit der Funktion

$$H_k := q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$$

und dann integrieren wir über Q :

$$\int_Q \left(\theta'' - \Delta \theta + \frac{\lambda}{t} \theta' \right) q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt. \quad (3.53)$$

Nach Lemma (5) haben wir bereits gezeigt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q (\theta'' - \Delta \theta) H_k dx dt \\ &= \left[\left(\theta', q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\theta'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx dt \\ &+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = I_1 + I_2,$$

wobei:

$$I_2 = \int_Q \frac{\lambda}{t} \theta' H_k dx dt.$$

Somit ist die Behauptung für eine starke Lösung $\theta = \theta(x, t)$ gezeigt. Den allgemeinen Fall für eine schwache Lösung $\theta = \theta(x, t)$ wird genauso gezeigt, wie im Fall der Wellengleichung. $\square$

Korollar 8 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $q \in (C^1(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$, dann gilt für jede schwache Lösung ϕ von (3.51):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma &= \left[\left(\phi', q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q |\phi'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dx dt \\ &+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \phi|^2 dx dt + \int_Q \frac{\lambda}{t} \phi' H_k dx dt. \end{aligned}$$

Beweis:

Der Beweis folgt aus der gezeigten Ungleichung (3.52) für $f \equiv 0$. $\square$

Satz 23 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^2$. Dann gilt für alle $T > T(x^0)$ und für jede schwache Lösung ϕ von (3.51):

$$2 E_0 (T - T(x^0)) \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \quad (3.54)$$

Beweis:

Im Folgenden setzen wir:

$$X := \left[(\phi'(t), \phi(t)) \right]_{t=0}^{t=T}, Y := \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} \text{ und } H_k := q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}.$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.54) für $q = m$ ist:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma = Y + \frac{n-1}{2} X + T E_0 + \int_Q \frac{\lambda}{t} \phi' H_k dx dt \quad (3.55)$$

$$\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma} |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma. \quad (3.56)$$

Einerseits folgt nach (2.49) für $T > 2R(x^0)$:

$$\left| Y + \frac{(n-1)}{2} X \right| \leq 2R(x^0) E_0. \quad (3.57)$$

Andererseits liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left| \int_Q \frac{\lambda}{t} \phi' m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt \right| &\leq \lambda R(x^0) (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) \\ &= 2\lambda R(x^0) E_0, \end{aligned}$$

d.h.:

$$-\lambda T R(x^0) E_0 \leq \int_Q \frac{\lambda}{t} \phi' m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt \quad (3.58)$$

Aus der Ungleichung (3.57) und (3.58) folgt dann:

$$\begin{aligned} (T - 2R(x^0)) E_0 - 2\lambda R(x^0) E_0 &\leq \int_Q \frac{\lambda}{t} \phi' m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt + Y + \frac{(n-1)}{2} X + T E_0 \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma} |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Somit ist dann für $T(x^0) = 2R(x^0)(1 + \lambda)$:

$$(T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma} |\partial_{\nu} \phi|^2 d\Sigma.$$

□

Lemma 17 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^2$. Dann existiert für alle schwache Lösung ϕ von (3.51) eine Konstante $C > 0$:

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C(T + 1) E_0. \quad (3.59)$$

Beweis: Siehe (4).

□

Korollar 9 (Eindeutigkeitssatz) :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Rand $\Gamma \in C^2$. Ist ϕ eine schwache Lösung von (3.51) und

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Sigma(x^0), \quad (3.60)$$

dann ist $\phi \equiv 0$.

Beweis:

Ist $\partial_{\nu} \phi = 0$ auf $\Sigma(x^0)$, dann folgt aus dem Satz (3.59) $E_0 = 0$ dies ist aber nur möglich, wenn $\phi^0 = 0$ und $\phi^1 = 0$, d.h. wenn $\phi \equiv 0$. □

Bemerkung 19 :

Nach dem Eindeutigkeitssatz (9) ist die quadratische Form (3.50) eine Norm in $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Satz 24 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $T > T(x^0) = 2R(x^0)(1 + \lambda)$, dann existiert für jedes Paar $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ eine Steuerfunktion $v \in L^2(\Sigma(x^0))$, sodass die Lösung $y = y(v)$ des Systems (3.43) die Bedingung

$$y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

erfüllt.

Beweis:

Wir haben die exakte Steuerbarkeit der Anfangsbedingungen $\{y^0, y^1\}$ mit

$$\{y^1, -y^0\} \in F', \quad (3.61)$$

wobei F' der Dualraum von F . F ist der Vervollständigungsraum von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \|\partial_\nu \phi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}. \quad (3.62)$$

Wir kombinieren (3.59) mit dem Satz (23), dann erhalten wir:

$$\text{Es existieren } C_1, C_2 > 0 : C_1 E_0 \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F^2 \leq C_2 E_0, \quad (3.63)$$

daraus folgt $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ und somit auch $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ d.h.

$$\{y^1, y^0\} \in F' \Leftrightarrow \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \quad (3.64)$$

Hier sieht man, dass der Raum F , in dem wir die EPD Gleichung steuern, derselbe Raum F bleibt, genauso wie im Fall der Wellengleichung.

Da die Steuerfunktion durch $v = \partial_\nu \phi$ auf $\Sigma(x^0)$ gegeben ist, wobei ϕ die Lösung von (3.44) mit den Anfangsbedingungen $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ und unter Verwendung der Ungleichung (3.59) folgt daraus:

$$v \in L^2(\Sigma(x^0)). \quad (3.65)$$

□

Bemerkung 20 :

Für die Steuerbarkeit der EPD-Gleichung braucht man für $\lambda = 1$ die doppelte Zeit, die man für die Steuerbarkeit der Wellengleichung benötigt.

4 Die exakte Randsteuerbarkeit von zwei gekoppelten Wellengleichungen

4.1 Formulierung des Problems

In diesem Abschnitt wird folgende geometrische Voraussetzung angenommen: Es seien $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene und beschränkte Gebiete, mit $\Gamma_0 = \partial\Omega_0, \Gamma_1 = \partial\Omega_1 \in C^2$ und $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$. Ω_0 und Ω_1 sind sternförmig in $x^0 \in \overline{\Omega}_1$. Wir setzen $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$ und betrachten folgendes System:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1'' - \Delta\phi_1 &= 0 && \text{in } Q, \\ \phi_1(0) = \phi_1^0, \phi_1'(0) &= \phi_1^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi_1 &= 0 && \text{auf } \Sigma, \\ \phi_2'' - \Delta\phi_2 &= 0 && \text{in } Q, \\ \phi_2(0) = \phi_2^0, \phi_2'(0) &= \phi_2^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi_2 &= 0 && \text{auf } \Sigma \setminus \Sigma(x^0), \\ \frac{\phi_2}{\partial\nu} &= 0 && \text{auf } \Sigma(x^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Wir setzen

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ auf } \Gamma_*(x^0)\} \quad (4.2)$$

und

$$W = \{\phi \in V : \Delta\phi \in L^2(\Omega), \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \text{ auf } \Gamma(x^0)\}. \quad (4.3)$$

Man sieht leicht in diesem Fall: $W \subset H^2(\Omega)$.

Sei nun $\lambda_0^2 > 0$ der erste Eigenwert von:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\phi &= \lambda_0^2 \phi && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} &= 0 && \text{auf } \Gamma(x^0), \\ \phi &= 0 && \text{auf } \Gamma_*(x^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Dann haben wir die Abschätzung:

$$|\phi| \leq \frac{1}{\lambda_0} |\nabla \phi| \quad \forall \phi \in V. \quad (4.5)$$

Wir betrachten nun die Energiegleichung der Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 des Systems (4.1)

$$E_i(t) = \frac{1}{2} (|\phi_i'(t)|^2 + |\nabla \phi_i(t)|^2) \quad \forall t \in [0, T], i = 1, 2. \quad (4.6)$$

Nach dem Energieerhaltungssatz bleibt die Energie entlang der Trajektorien konstant, d.h.:

$$E_i(t) = E_{0i} = \frac{1}{2} (|\phi_i^1(t)|^2 + |\nabla \phi_i^0(t)|^2) \quad \forall t \in [0, T], i = 1, 2. \quad (4.7)$$

Zudem wissen wir, dass $E_{01}^{\frac{1}{2}}$ eine Norm in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ist und $E_{02}^{\frac{1}{2}}$ eine Norm in $V \times L^2(\Omega)$ ist. Diese genannten Normen sind äquivalent zu der von $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ erzeugten Norm. Ferner setzen wir nun:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.8)$$

somit

$$E(t) = E_0 = E_{01} + E_{02} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Daher ist die Norm $E_0^{\frac{1}{2}}$ in

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times L^2(\Omega)$$

äquivalent zu der von $[H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)]^2$ erzeugten Norm.

Lemma 18 :

Sei $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reguläre Funktion und sei $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ die Familie der Differentialoperatoren der ersten Ordnung auf Γ , dann gilt:

$$|\nabla \varphi|^2 = |\nabla_{\sigma} \varphi|^2 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.10)$$

mit $\nabla_{\sigma} \varphi = (\sigma_1 \varphi, \dots, \sigma_n \varphi)$.

Beweis: s. z. B. [14]

Lemma 19 :

Es sei $q \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$, dann gilt für jede schwache Lösung θ des Problems

$$\left. \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \theta(0) &= \theta^0, \theta'(0) = \theta^1 && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ \theta &= 0 && \text{auf } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} q_k \nu_k |\partial_\nu \theta|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} q_k \nu_k (|\theta'|^2 - |\nabla_\sigma \theta'|^2) d\Sigma &= \left[\left(\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} \\ + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2) dx dt + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx dt - \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beweis: s. z. B. [14]

Wir betrachten nun das homogene Problem

$$\left. \begin{aligned} \phi'' - \Delta \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) &= \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ \phi &= 0 && \text{auf } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Die Gleichung (4.12) liefert für $q = m$ und $f = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} m_k \nu_k |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_k \nu_k (|\phi'|^2 - |\nabla_\sigma \phi'|^2) d\Sigma &= \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} \\ + \frac{n}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) dx dt + \int_Q |\nabla \phi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Da $m_k \nu_k \leq 0$ auf Σ_1 , gilt weiter:

$$\begin{aligned} \left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} \right) \right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) dx dt \\ + \frac{n-1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} m_k \nu_k |\partial_\nu \phi|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_Q |\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2 dx dt = [(\phi'(t), \phi(t))]_{t=0}^{t=T},$$

ist dann:

$$\left[\left(\phi'(t), m_k \frac{\partial \phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \phi(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T} + T E_0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_k \nu_k (|\phi'|^2 - |\nabla_\sigma \phi'|^2) d\Sigma. \quad (4.14)$$

Lemma 20 :

Es sei $T > T(x^0) = 4R(x^0) + \frac{n-1}{\lambda}$. Ferner sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma \in C^2$. Dann gilt für jede Menge der Anfangsbedingungen

$$\{\phi_1^0, \phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega); \{\phi_2^0, \phi_2^1\} \in W \times V, \quad (4.15)$$

die Abschätzung:

$$(T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_\nu \phi_1 + \phi_2'|^2 d\Sigma. \quad (4.16)$$

Beweis:

Für $T > 2R(x^0)$ haben wir im Satz (19) bereits gezeigt:

$$(T - T(x^0)) E_{01} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_\nu \phi_1|^2 d\Sigma. \quad (4.17)$$

Nach (4.14) gilt für ϕ_2 :

$$\begin{aligned} \left[\left(\phi_2'(t), m_k \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \phi_2(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T} + T E_{02} &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m_k \nu_k (|\phi_2'|^2 - |\nabla_\sigma \phi_2'|^2) d\Sigma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m_k \nu_k |\phi_2'|^2 d\Sigma \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\phi_2'|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Zudem gilt für alle $t \in [0, T]$:

$$\left| \left(\phi_2'(t), m_k \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial x_k} \right) \right| \leq R(x^0) E_{02} \quad (4.18)$$

und

$$|(\phi_2'(t), \phi_2(t))| \leq \frac{E_{02}}{\lambda_0}, \quad (4.19)$$

ebenso gilt weiter

$$\left| \left[\left(\phi_2'(t), m_k \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \phi_2(t) \right) \right]_{t=0}^{t=T} \right| \leq \left(2R(x^0) + \frac{n-1}{\lambda_0} \right) E_{02}. \quad (4.20)$$

Daraus folgt für $T > 2R(x^0) + \frac{n-1}{\lambda_0}$:

$$\left(T - 2R(x^0) - \frac{n-1}{\lambda_0} \right) E_{02} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\phi_2'|^2 d\Sigma. \quad (4.21)$$

Wegen (4.17), (4.21) und $E_{02} < E_0$ gilt dann:

$$\left(T - 2R(x^0) - \frac{n-1}{\lambda_0} \right) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\phi_2'|^2 + |\partial_\nu \phi_1|^2 d\Sigma. \quad (4.22)$$

Wir multiplizieren die Gleichung $\phi_1'' - \Delta\phi_1 = 0$ mit ϕ_2 und die Gleichung $\phi_2'' - \Delta\phi_2 = 0$ mit ϕ_1 und wir integrieren über Q .

Dann gilt einerseits

$$\int_Q \phi_1'' \phi_2' + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2' dx dt = \int_{\Sigma} \phi_2' \partial_{\nu} \phi_1 d\Sigma$$

und da $\phi_2' = 0$ auf $\Sigma_*(x^0)$, ist dann

$$\int_Q \phi_1'' \phi_2' + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2' dx dt = \int_{\Sigma(x^0)} \phi_2' \partial_{\nu} \phi_1 d\Sigma. \quad (4.23)$$

Andererseits gilt:

$$\int_Q \phi_2'' \phi_1' + \nabla \phi_2 \cdot \nabla \phi_1' dx dt = \int_{\Sigma} \phi_1' \partial_{\nu} \phi_2 d\Sigma$$

und da $\phi_1' = 0$ auf Σ , ist dann

$$\int_Q \phi_2'' \phi_1' + \nabla \phi_2 \cdot \nabla \phi_1' dx dt = \int_{\Sigma} \phi_1' \partial_{\nu} \phi_2 d\Sigma = 0. \quad (4.24)$$

Wir addieren die Gleichungen (4.23) und (4.24):

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{d}{dt} (\phi_1' \phi_2' + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2) dx dt &= [((\phi_1'(t), \phi_2'(t)) + (\nabla \phi_1(t), \nabla \phi_2(t)))]_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_{\Sigma(x^0)} \phi_2' \partial_{\nu} \phi_1 d\Sigma \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\left| [((\phi_1'(t), \phi_2'(t)) + (\nabla \phi_1(t), \nabla \phi_2(t)))]_{t=0}^{t=T} \right| = \left| \int_{\Sigma(x^0)} \phi_2' \partial_{\nu} \phi_1 d\Sigma \right| \leq 2(E_{01} + E_{02}) = 2E_0,$$

d.h.:

$$\frac{R(x^0)}{2} \left| \int_{\Sigma(x^0)} 2 \phi_2' \partial_{\nu} \phi_1 d\Sigma \right| \leq 2R(x^0) E_0. \quad (4.25)$$

Aus der Gleichung (4.22) und (4.25) folgt dann die Behauptung:

$$\begin{aligned} \left(T - 2R(x^0) - \frac{n-1}{\lambda_0} \right) E_0 - 2R(x^0) E_0 &= \left(T - 4R(x^0) - \frac{n-1}{\lambda_0} \right) E_0 \\ &= (T - T(x^0)) E_0 \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_{\nu} \phi_1|^2 + 2 |\phi_2' \partial_{\nu} \phi_1| + |\phi_2'|^2 d\Sigma \\ &= \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\partial_{\nu} \phi_1 + \phi_2'|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

□

Korollar 10 (Eindeutigkeitssatz) :

Es seien $T > T(x^0)$ und $\{\phi_1^0, \phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\{\phi_2^0, \phi_2^1\} \in W \times V$. Erfüllt Ω die oben genannte geometrische Bedingung, dann gilt:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} + \phi_2' = 0 \quad \text{auf } \Sigma(x^0) \quad \Rightarrow \quad \phi_1 \equiv \phi_2 \equiv 0. \quad (4.26)$$

Wir betrachten das System:

$$\left. \begin{aligned} y_1'' - \Delta y_1 &= 0 && \text{in } Q, \\ y_1(0) = y_1^0, y_1'(0) &= y_1^1 && \text{in } \Omega, \\ y_2'' - \Delta y_2 &= 0 && \text{in } Q, \\ y_2(0) = y_2^0, y_2'(0) &= y_2^1 && \text{in } \Omega, \\ y_1 = y_2 &= 0 && \text{auf } \Sigma_*(x^0), \\ y_1 &= v && \text{auf } \Sigma(x^0), \\ \frac{y_2}{\partial \nu} &= v' && \text{auf } \Sigma(x^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

4.2 Satz der exakten Steuerbarkeit von zwei gekoppelten Wellengleichungen

Satz 25 :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Ferner sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $T > T(x^0)$, dann existiert für jede Menge der Anfangsbedingungen $\{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V'$ eine Steuerfunktion $v \in L^2(\Sigma(x^0))$, sodass die Lösung $\{y_1, y_2\}$ des Systems (4.27) die Bedingung

$$y_1(x, T; v) = y_1'(x, T; v) = y_2(x, T; v) = y_2'(x, T; v) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

erfüllt.

Beweis:

Wir lösen zunächst das System (4.1) mit den Anfangsbedingungen

$$\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times W \times V. \quad (4.28)$$

Wir definieren die Norm

$$\|\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\}\|_F = \left(\int_{\Sigma(x^0)} |\partial_\nu \phi_1 + \phi_2'|^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

und konstruieren den Raum:

$F =$ Der Vervollständigungsraum von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times W \times V$, bezüglich der Norm $\|\cdot\|_F$.

Nach der Ungleichung (4.16) ist:

$$F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times L^2(\Omega), \quad (4.30)$$

überdies

$$H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V' \times L^2(\Omega) \subset F', \quad (4.31)$$

daher gilt dann

$$\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} \in F \Leftrightarrow \partial_\nu \phi_1 + \phi_2' \in L^2(\Sigma(x^0)). \quad (4.32)$$

Anhand der Einbettung (4.30) ist

$$\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} \in F \Rightarrow \{\phi_1^0, \phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad (4.33)$$

und nach der gezeigten Randsteuerbarkeit der Wellengleichung, ist für $T > T(x^0)$:

$$\{\phi_1^0, \phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \Rightarrow \partial_\nu \phi_1 \in L^2(\Sigma(x^0)). \quad (4.34)$$

Somit folgt aus (4.32) und (4.34)

$$\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} \in F \Leftrightarrow \{\phi_1^0, \phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ und } \phi_2' \in L^2(\Sigma(x^0)). \quad (4.35)$$

Wir betrachten nun die Norm:

$$\|\{\phi_2^0, \phi_2^1\}\|_E = \left(\int_{\Sigma(x^0)} |\phi_2'|^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

und wir konstruieren den Hilbertraum E :

$E :=$ Der Vervollständigungsraum von $W \times V$, bezüglich der Norm $\|\cdot\|_E$.

Wir haben dann

$$E \subset V \times L^2(\Omega); V' \times L^2(\Omega) \subset E', \quad (4.37)$$

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times E \quad (4.38)$$

und

$$F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times E' \quad (4.39)$$

Wir betrachten das System:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1'' - \Delta \psi_1 &= 0 && \text{in } Q, \\ \psi_2'' - \Delta \psi_2 &= 0 && \text{in } Q, \\ \psi_1(T) = \psi_1'(T) = \psi_2(T) = \psi_2'(T) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \psi_1 = \psi_2 &= 0 && \text{auf } \Sigma_*(x^0), \\ \psi_1 = \partial_\nu \phi_1 + \phi_2' & && \text{auf } \Sigma(x^0), \\ \frac{\psi_2}{\partial \nu} = \partial_t(\partial_\nu \phi_1 + \phi_2') & && \text{auf } \Sigma(x^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Einerseits haben wir die Existenz, Eindeutigkeit und die Regularität der Lösungen des Problems (4.40) bereits gezeigt. Es existiert eine eindeutige Lösung $\{\psi_1, \psi_2\}$ mit $\{\psi_1'(0), -\psi_1(0), \psi_2'(0), -\psi_2(0)\} \in F'$. Andererseits ist:

$$\psi_1 \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (4.41)$$

$$\{\psi_2', -\psi_2\} \in L^\infty(0, T; E'). \quad (4.42)$$

Wir konstruieren nun einen Operator:

$$\Lambda : F \rightarrow F', \quad (4.43)$$

mit

$$\Lambda \{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} = \{\psi_1'(0), -\psi_1(0), \psi_2'(0), -\psi_2(0)\} \quad (4.44)$$

und nach dem Problem (4.40) ist:

$$\langle \Lambda \{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\}, \{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} \rangle = \|\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\}\|_F^2. \quad (4.45)$$

Dies zeigt dass, Λ ein Isomorphismus von F nach F' ist. Daher gilt für jede Menge der Anfangsbedingungen $\{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V'$:

$$\{y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V' \times L^2(\Omega) \subset F'. \quad (4.46)$$

Somit hat das Problem

$$\Lambda \{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} = \{y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0\} \quad (4.47)$$

eine eindeutige Lösung $\{\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1\} \in F$. Betrachten wir die Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 des Problems (4.1), dann erfüllt die Steuerfunktion

$$v = \partial_\nu \phi_1 + \phi_2' \in L^2(\Sigma(x^0)) \quad (4.48)$$

die Voraussetzung. □

Bemerkung 21 :

Die Zeitableitung $\partial_t (\partial_\nu \phi_1 + \phi_2')$ ist im Sinne der Distribution nicht übernommen, aber im Sinne der Dualität zwischen $H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ und seinem Dualraum, d.h.:

$$\langle \partial_t (\partial_\nu \phi_1 + \phi_2'), v \rangle = - \int_{\Sigma(x^0)} (\partial_\nu \phi_1 + \phi_2') v' d\Sigma, \quad \forall H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))). \quad (4.49)$$

Bemerkung 22 :

Wir haben die exakte Steuerbarkeit mit den Anfangsbedingungen $\{y_1^0, y_1^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ und $\{y_2^0, y_2^1\} \in E'$ gezeigt. Es ist aber schwierig den Raum E in klassischen Räumen zu charakterisieren. Wir haben nach (4.37) gezeigt, dass $E \subset V \times L^2(\Omega)$ aber wir können zum Beispiel nicht zeigen dass $W \times V \subset E$.

5 Die innere exakte Steuerbarkeit der Wellengleichung

5.1 Formulierung des Problems

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, offen und beschränkt mit einem Lipschitz-Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Für $T > 0$ betrachten wir im Folgenden die Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingung:

$$y'' - \Delta y = v, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

mit zwei Anfangsbedingungen:

$$y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \quad \text{in } \Omega \quad (5.2)$$

und der Randbedingung:

$$y = 0 \quad \text{auf } \Gamma \times (0, T). \quad (5.3)$$

Wir betrachten das homogene Problem:

$$\left. \begin{aligned} \phi'' - \Delta \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) &= \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

und die Energiegleichung bezüglich (5.4):

$$E_0 = \frac{1}{2} (|\phi^1|^2 + |\nabla \phi^0|^2). \quad (5.5)$$

Lemma 21 :

Es sei $T > 0$.

a) Die Seminorm:

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F := \left(\int_Q |\phi'|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|\phi'\|_{L^2(Q)} \quad (5.6)$$

ist eine Norm in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Die Normen $\|\phi'\|_{L^2(Q)}$ und $E_0^{\frac{1}{2}}$ sind in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ äquivalent.

Beweis:

a) Es sei $\phi' = 0$ in Q , dann ist $\phi^1 = 0$ und $\phi(x, t) = \phi^0(x) \quad \forall (x, t) \in Q$. Da ϕ eine Lösung von (5.4) ist und nach der Behauptung ist $\phi'' = 0$, gilt dann $\Delta\phi^0 = 0$ mit $\phi^0 \in H_0^1(\Omega)$. Das bedeutet $\phi^0 = 0$ und somit ist $\|\cdot\|_F$ eine Norm.

b) Nach dem Energieerhaltungssatz der Wellengleichung gilt:

$$\begin{aligned} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F &\leq \left(\frac{1}{2} \int_Q |\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} 2TE_0 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (TE_0)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CE_0^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

es bleibt nun zu zeigen, dass

$$E_0^{\frac{1}{2}} \leq C \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F. \quad (5.7)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.4) mit der Funktion $\mu(x, t) = g(t)\phi(x, t)$, wobei $g(t) = t^2(T-t)^2$ und wir integrieren über Q . Da $g(0) = g(T) = 0$ verschwinden hier die Randwertterme:

$$\int_Q (g(t)\phi\phi'' - g(t)\phi\Delta\phi) dxdt = - \int_Q (g(t)\phi'\phi' + g'(t)\phi'\phi) dxdt + \int_Q g(t)\nabla\phi\nabla\phi dxdt,$$

daraus folgt

$$\int_Q g(t)|\nabla\phi|^2 dxdt = \int_Q g'(t)\phi'\phi dxdt + \int_Q g(t)|\phi'|^2 dxdt. \quad (5.8)$$

Zudem gilt für alle $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_Q g'(t)\phi'\phi dxdt \right| &\leq \rho \int_Q g(t)|\phi|^2 dxdt + \frac{1}{4\rho} \int_Q \frac{g'(t)^2}{g(t)} |\phi'|^2 dxdt \\ &\leq \rho \int_Q g(t)|\phi|^2 dxdt + \frac{1}{4\rho} \left\| \frac{|g'(t)^2|}{g(t)} \right\|_{L^\infty(0,T)} \int_Q |\phi'|^2 dxdt \\ &= \rho \int_Q g(t)|\phi|^2 dxdt + C(\rho) \int_Q |\phi'|^2 dxdt, \end{aligned}$$

d.h.:

$$\left| \int_Q g'(t)\phi'\phi dxdt \right| \leq \rho \int_Q g(t)|\phi|^2 dxdt + C(\rho) \int_Q |\phi'|^2 dxdt. \quad (5.9)$$

Sei λ_0^2 der erste Eigenwert von $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$, dann gilt:

$$\lambda_0^2 |u| \leq |\nabla u| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (5.10)$$

Für $\rho < \lambda_0^2$ gilt weiter nach (5.8) und (5.9):

$$\left(1 - \frac{\rho}{\lambda_0^2}\right) \int_Q g(t) |\nabla \phi|^2 dxdt \leq \int_Q g(t) |\phi'|^2 dxdt + C(\rho) \int_Q |\phi'|^2 dxdt, \quad (5.11)$$

somit gilt für $C > 0$ groß genug:

$$\int_Q g(t) |\nabla \phi|^2 dxdt \leq C \int_Q |\phi'|^2 dxdt. \quad (5.12)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T g(t) dt\right) E_0 &= \frac{1}{2} \int_Q g(t) (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) dxdt \\ &\leq \|g(t)\|_{L^\infty(0,T)} \int_Q |\phi'|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q g(t) |\nabla \phi|^2 dxdt \\ &\leq C \int_Q |\phi'|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Wegen $\int_0^T g(t) dt > 0$, ist dann:

$$E_0^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_Q |\phi'|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = C \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F. \quad (5.13)$$

□

Lemma 22 :

Es sei $T > 0$. In $F_1 := L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ sind die Normen

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{F_1} := \left(\int_Q |\phi|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

und

$$\left(|\phi^0|^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

äquivalent.

Beweis:

Wir betrachten folgendes Problem:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von (5.16) und $\{\phi^0, \phi^1\} \in F_1$. Einerseits, da $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ist auch $\{u, \phi^0\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Andererseits, wenn $\phi = \phi(x, t)$ die Lösung von (5.4) mit der Anfangsbedingung $\{\phi^0, \phi^1\}$, dann ist die Funktion

$$v(x, t) = \int_0^T \phi(x, s) ds + u(x) \quad (5.17)$$

die Lösung von (5.4) mit der Anfangsbedingung $\{u, \phi^0\}$. Nach Lemma (21) ist die Norm

$$\|v'\|_{L^2(Q)} = \|\phi\|_{L^2(Q)} \quad (5.18)$$

äquivalent zu der Norm

$$\left(|\phi^0|^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.19)$$

diese ist äquivalent zu der Norm

$$\left(|\phi^0|^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.20)$$

weil $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ein Isomorphismus ist. $\square$

5.2 Satz der inneren exakten Steuerbarkeit der Wellengleichung

Satz 26 :

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem Lipschitz-Rand $\partial\Omega$. Ferner sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $T > 0$, dann existiert für jedes Paar $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ eine Steuerfunktion $v \in L^2(Q)$, sodass die Lösung $y = y(v)$ von

$$\left. \begin{aligned} y'' - \Delta y &= v && \text{in } Q, \\ y(0) &= y^0, y'(0) = y^1 && \text{in } \Omega, \\ y &= 0 && \text{auf } \Sigma, \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

die Bedingung $y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0$ in Ω erfüllt.

Beweis:

Gegeben seien die Anfangsbedingungen $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Wir betrachten das homogene Problem:

$$\left. \begin{aligned} \phi'' - \Delta \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) &= \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 && \text{in } \Omega, \\ \phi &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Wir definieren die Norm:

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{F_1} := \left(\int_Q |\phi|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.23)$$

Sei F_1 der Vervollständigungsraum von $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{F_1}$. Nach Lemma (22) ist

$$F_1 = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \quad (5.24)$$

Ferner betrachten wir nun:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= -\phi && \text{in } Q, \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \psi &= 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Wenn $\phi \in L^2(Q)$, dann existiert nach Lemma (2.60) eine eindeutige Lösung ψ von (5.25) mit der Eigenschaft

$$\psi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.26)$$

Wir definieren den Operator

$$\Lambda \{\phi^0, \phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

und wir multiplizieren die Gleichung (5.25) mit der Lösung $\phi = \phi(x, t)$ von (5.22)

$$- \int_Q \phi \psi'' - \phi \Delta \psi dxdt = \int_Q |\phi|^2 dxdt. \quad (5.27)$$

Aus der linken Seite der Gleichung (5.27) ergibt sich durch partielle Integration bzgl. t :

$$\begin{aligned} \int_Q \phi \psi'' dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \phi \psi'' dxdt \\ &= \int_\Omega \left([\phi \psi']_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi' \psi' dt \right) dx \\ &= \int_\Omega \left([\phi \psi']_{t=0}^{t=T} - \left([\phi' \psi]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \phi'' \psi dt \right) \right) dx \\ &= \int_0^T \int_\Omega \phi'' \psi dxdt + \int_\Omega ([\phi \psi' - \phi' \psi]_{t=0}^{t=T}) dx \\ &= \int_0^T \int_\Omega \phi'' \psi dxdt + \int_\Omega \left(\phi(T) \psi'(T) - \phi'(T) \psi(T) - \phi(0) \psi'(0) + \phi'(0) \psi(0) \right) dx, \end{aligned}$$

wegen $\psi(T) = \psi'(T) = 0$ ist dann:

$$\int_Q \phi \psi'' dxdt = \int_0^T \int_\Omega \phi'' \psi dxdt + \int_\Omega \left(\phi'(0) \psi(0) - \phi(0) \psi'(0) \right) dx. \quad (5.28)$$

Unter der Verwendung der 2. Greenschen Formel für ψ und ϕ auf dem rechten Integral der Gleichung (5.27) ergibt sich:

$$\int_Q -\phi \Delta \psi \, dx dt = \int_{\Sigma} \psi \partial_{\nu} \phi - \phi \partial_{\nu} \psi \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi \Delta \phi \, dx dt,$$

da $\psi = \phi = 0$ auf Σ verschwinden die Randwertterme und es gilt weiter:

$$\int_Q -\phi \Delta \psi \, dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \psi \Delta \phi \, dx dt. \quad (5.29)$$

Nun addieren wir (5.28) und (5.29):

$$\int_Q \phi \psi'' - \phi \Delta \psi \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \psi (\phi'' - \Delta \phi) \, dx dt - \int_{\Omega} \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx.$$

Nach (5.22) ist $\phi'' - \Delta \phi = 0$, somit ist:

$$\begin{aligned} \int_Q |\phi|^2 \, dx dt &= \int_{\Omega} \left(\phi(0) \psi'(0) - \phi'(0) \psi(0) \right) dx \\ &= \langle \{ \psi'(0), -\psi(0) \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle \\ &= \langle \Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle, \end{aligned}$$

d.h.:

$$\int_Q |\phi|^2 \, dx dt = \langle \Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle. \quad (5.30)$$

Daher ist

$$\Lambda : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

ein Isomorphismus. Somit hat folgende Gleichung für alle Anfangsbedingungen $\{y^0, y^1\}$, mit $\{y^1, -y^0\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$\Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \} = \{y^1, -y^0\} \quad (5.31)$$

eine eindeutige Lösung $\{ \phi^0, \phi^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Hierbei ist ϕ die Lösung von (5.22), die die Anfangsbedingungen $\{ \phi^0, \phi^1 \}$ aus der Gleichung (5.31) erfüllt. Schließlich erfüllt die Steuerfunktion

$$v = -\phi \in L^2(Q) \quad (5.32)$$

die Bedingung $y(T; v) = y'(T; v) = 0$ in Ω . □

Literaturverzeichnis

- [1] A. Kröner, K. Kunisch, B. Vexler: Semismooth Newton Methods for Optimal Control of the Wave Equation with Control Constraints, *SIAM J. Control Optim.* 49(2) (2011), 830–858.
- [2] I. Lasiecka et al., Nonhomogeneous Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Operators, *J. Math. Pures Appl.* 65(2) (1986), 149–192.
- [3] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte dans des polygones et polyèdres. *C.R. Acad. Sc. Paris.t.* 304, Série I, 13. 1988.
- [4] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. Preprint 153, Université de Nice, 1987.
- [5] P. Grisvard, Elliptic problems in non smooth domains, Pitman, 1985.
- [6] J.L. Lions: Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems, *Siam Rev.* 30(1988), 1-68.
- [7] Boundary control theory for hyperbolic and parabolic equations with constant coefficients. *Annali Sc. N. Sup. Pisa.* IV. (1978), pp. 567-580.
- [8] Lagnese, J. E., Lions, J. L. (1988): Modelling, Analysis and Control of Thin Plates, Collection RMA, Masson, Paris
- [9] Lagnese, J. E. (1989): Boundary Stabilization of Thin Plates, SIAM, Philadelphia (1989)
- [10] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, A. T. Lourêdo: Introduction to Exact Control Theory Method Hum, 2013.
- [11] V. Komornik: Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1993.
- [12] L. F. Ho, Observabilité frontière de l'équation des ondes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 302, (1986), 443-446.
- [13] J. L. Lions, E. Magenes: Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1 et 2. Dunod. Paris, 1968.
- [14] M. M. Cavalcanti, Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary condition and timedependent coefficients, no 1 (1999), pp. 53-89.

- [15] Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions. SIAM Rev. 20 (1978), pp.639-739.
- [16] J.L. Lions : Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués, Tome 1, RMA 8, Paris, 1988.
- [17] M. Pokojovy : Zur Theorie Wärmeleitender Reissner-Mindlin-Platten, Dissertation, Universität Konstanz, 2011.
- [18] L.C.Evans, Partial Differential Equations, A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, **19**, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [19] Vladimir I. Arnold : Lectures on partial differential equations, Springer Verlag 2004.
- [20] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, Geometric Inequalities, Springer Grundlehren, **285** (1988).
- [21] L. Hörmander : The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer Verlag 1989.
- [22] F. G. Friedlander, Introduction to the Theory of Distributions, Cambridge University Press, 1982.
- [23] P. Halmos and V. Sunder, Bounded Integral Operators on L^2 Spaces, Springer Verlag.
- [24] H. W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Springer, Berlin, 2006.
- [25] M. Ruzicka, Nichtlineare Funktionalanalysis , Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [26] M. Dobrowolski, Angewandte Funktionalanalysis , Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [27] D. Werner, Functional Analysis, Springer, Berlin, 2000.
- [28] W. Rudin, Functional Analysis, University of Wisconsin, 1991.
- [29] W. Rudin, Reelle und Komplexe Analysis, R.Oldenbourg Verlag, Munich, 1999.
- [30] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, 2011.
- [31] R. J. Zimmer, ESSENTIAL RESULTS OF FUNCTIONAL ANALYSIS, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1990.
- [32] P. Günther, HUYGEN'S PRINCIPLE AND HADAMARD'S CONJECTURE, Springer-Verlag New York, 1991.
- [33] Mitschrift zur Vorlesung Prof. Dr. Matthias Günther zum Thema, PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, Universität Leipzig, 2013

Erklärung der Urheberschaft

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort,

Datum,

Unterschrift