

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Die Formeln von Seal und
deren Anwendungen für Rückversicherungen

Diplomarbeit

Leipzig, Januar, 2013

vorgelegt von

Reum, Patrick
Studiengang: Mathematik-Diplom

Betreuender Hochschullehrer: Prof. Dr. Manfred Riedel
Mathematisches Institut, Abteilung: Wirtschaftsmathematik / Stochastik

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit und während meines Studiums unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. Riedel, der stets für mich ansprechbar und mir mit nützlichen Anregungen und konstruktiver Kritik behilflich war.

Großer Dank gebührt ebenso meinen Freunden Alexandra, Peter, Stefan und Steffi, die sich die Mühe gemacht haben diese Arbeit Korrektur zu lesen und mich somit auf den ein oder anderen Schraipväler hinweisen konnten. An dieser Stelle möchte ich mich ebenfalls bei Lutz bedanken, welcher mir mit seinen Fachkenntnissen bei der numerischen Implementierung und Auswertung einiger Ergebnisse dieser Arbeit helfen konnte. Obwohl es nicht alle Projekte in diese Arbeit geschafft haben, konnte ich eine Menge Erfahrungen aus unseren Programmiersitzungen gewinnen.

Bedanken möchte ich mich zudem bei Nicole, Patrice, Ron und Susi für die vielen lustigen Abende in der Anfangszeit meines Studiums. Neben euch darf ich natürlich nicht Julia vergessen: Danke für deine tatkräftige Unterstützung während dieser Zeit.

Zuletzt gebührt ein besonderer Dank meinen Eltern und Brüdern, die mich während des Studiums stets begleitet und unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	3
2. Grundlagen	5
3. Der Poisson-Prozess	24
4. Der Satz von Takács	31
5. Das Ruinmodell	41
6. Integralgleichungen der Ruintheorie	51
7. Die Formeln von Seal	64
8. Die Roulette-Aufgabe	82
9. Rückversicherung	89
10. Zusammenfassung	106
A. Anhang	108
Literatur	112
Erklärung	113

1. Einführung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Ruinwahrscheinlichkeiten im klassischen Risiko-modell, sowie den Auswirkungen von Rückversicherungen auf selbige.

Ziel dieser Arbeit wird es zunächst sein, mathematische Formeln zur Berechnung oder Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit, beziehungsweise ihrem Pendant der Überlebenswahrscheinlichkeit, aufzustellen. Dies ist insbesondere Gegenstand der Ruintheorie, welche ein Teilgebiet der Risikotheorie darstellt. Die Risikotheorie, oder auch Nichtlebensversicherungsmathematik genannt, beschäftigt sich dabei mit Sachversicherungen, die vor allem durch zufällige Anzahl und Höhe von Schäden gekennzeichnet sind.

Nachdem wir uns mit einigen grundlegenden Begriffen und deren Eigenschaften beschäftigt haben, werden wir stochastische Prozesse und insbesondere den zusammengesetzten Poisson-Prozess betrachten. Dieser wird eine entscheidende Rolle in unserem Modell einnehmen, da er die gewünschte Zufälligkeit von Schadensanzahl sowie -höhe zulässt. Außerdem besitzt er einige nützliche Eigenschaften, von denen sich vor allem der Satz von Takács für spätere Berechnungen als nützlich erweisen wird.

Unser zugrundeliegendes mathematisches Modell wird dem, in der Praxis häufig verwendeten, Cramér-Lundberg-Modell entsprechen. Dieses, oft auch „klassisches Ruinmodell“ genannte Modell, zeichnet sich grob durch vier Annahmen aus:

- Die Schadensanzahl ist Poisson-verteilt.
- Die Einzelschäden werden durch eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen beschrieben.
- Prämien werden stetig und konstant gezahlt.
- Die Schadensanzahl ist unabhängig von der Höhe der Schäden.

Es handelt sich also um ein Modell in stetiger Zeit, weswegen wir Ruin ebenfalls in stetiger Zeit betrachten wollen.

Wir werden feststellen, dass sich besonders Rechnungen für die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit als schwierig erweisen. Als nützliches Werkzeug für diese Problematik lassen sich die Formeln von Seal finden, weswegen wir sie, als eines der Hauptresultate dieser Arbeit, zum einen beweisen und zum anderen für einen allgemeineren Fall fortsetzen werden. Mithilfe der allgemeineren Formel werden wir letztendlich in der Lage sein zu zeigen, dass sich die endliche Ruinwahrscheinlichkeit lediglich unter strengen Voraussetzungen exakt approximieren lässt. Wir werden uns bis zu diesem Zeitpunkt im Wesentlichen an das Buch „Stochastic Processes for Insurance and Finance“ von Rolski, Schmidli, Schmidt und Teugels halten.

Zum Abschluss der Arbeit werden wir Möglichkeiten zur Verringerung des Risikos eines Versicherers begutachten. Dies lässt sich zum Beispiel mittels Rückversicherungen, also einer Versicherung des Versicherers, erreichen.

Mithilfe eines einführenden Beispiels werden wir mathematisch demonstrieren, warum vor allem große Schäden mit geringer Wahrscheinlichkeit, ein Versicherungsunternehmen schnell an die Grenzen der Zahlungsfähigkeit bringen können. In der Praxis tritt dies vor allem bei Naturkatastrophen auf, wie Grafik 1.1. weiter unten verdeutlicht. Im Jahre 2012 verursachten lediglich vier tropische Wirbelstürme in den Vereinigten Staaten von Amerika einen Gesamtschaden von rund 52 Milliarden US-Dollar, wovon wiederum die Hälfte versichert war. Mit insgesamt versicherten Schäden in Höhe von 58 Milliarden US-Dollar, war 2012 zudem das zweit teuerste Jahr überhaupt für Versicherungen in den USA (nach 2005).

Schäden durch Naturkatastrophen in den Vereinigten Staaten von Amerika – 2012				
Stand: 01.01.2013	Anzahl der Ereignisse	Todesfälle	Geschätzter Gesamtschaden in Millionen US\$	Geschätzter versicherter Schaden in Millionen US\$
Tropischer Wirbelsturm	4	143	52.240	26.360
starke Unwetter	115	118	27.688	14.914
Dürre	2	0	20.000	15.000 – 17.000*
Flächenbrand	38	13	1.112	595
Wintersturm	2	7	81	38
Flut	19	3	13	0

Quelle: MR NatCat SERVICE

* Von den insgesamt rund 20 Milliarden US\$ landwirtschaftlicher Ernteschäden, konnten etwa 15-17 Milliarden US\$ durch das „public-private multi-peril crops insurance“-Programm wiederhergestellt werden. Dies macht es zum größten Verlust der US Landwirtschaftsversicherungsgeschichte. Im Durchschnitt belaufen sich versicherte Verluste in der US-Landwirtschaft auf ca. 9 Milliarden US\$.

Schäden durch Naturkatastrophen Weltweit – 2012

Zusammenfassung:

- 90% der gesamten versicherten Schäden weltweit (65 Milliarden US\$) lassen sich auf die Vereinigten Staaten von Amerika zurückführen (Langzeitdurchschnitt beträgt ca. 57%).
- Hurrikan Sandy und die US Dürre waren die beiden kostspieligsten Ereignisse.
- Die im Mai in Italien aufgetretenen Erdbeben waren mit rund 1,6 Milliarden US\$ versicherter Schäden, die teuersten Versicherungsschäden der italienischen Geschichte.
- Obwohl 2012 ein Jahr mit verhältnismäßig geringer Anzahl von Todesfällen durch Naturkatastrophen war, ist es das dritt teuerste Jahr für die Versicherungsindustrie weltweit (nach 2005 und 2011).

Grafik 1.1. - Naturkatastrophen-Statistik 2012

Quelle: [Webinar Munich Re](#) - Seiten 6, 28 und 40.

Die Minimierung des Risikos durch die optimale Wahl der Höhe oder des Typs einer Rückversicherung wurde bereits in vielen Büchern behandelt. Vor allem in den letzten zwei Jahrzehnten, entwickelten sich entsprechende Theorien dank neuer numerischer Möglichkeiten weiter. Die meisten dieser Studien setzen voraus, dass sich die Rückversicherungsstrategie im beobachteten Zeitraum nicht ändert, also ein statisches Modell vorliegt. Wir werden in unseren Beobachtungen eine periodische Änderung des Typs und/oder der Höhe der Rückversicherung zulassen (zum Beispiel zu Beginn eines jeden Jahres). Dazu halten wir uns hauptsächlich an die Arbeit „Optimal Dynamic Reinsurance“ von Dickson und Waters, mit dessen Hilfe wir am Ende in der Lage sein werden einen Algorithmus zur Ermittlung der optimalen Rückversicherungsstrategie anzugeben.

2. Grundlagen

Wir werden uns in diesem Kapitel wichtigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Vorüberlegungen widmen. Nach einer kurzen Definition der Grundbegriffe, werden wir uns insbesondere mit dem Existenzradius der momenterzeugenden Funktion befassen und einige grundlegende Eigenschaften selbigem nachweisen. Im Anschluss stellen wir die Verbindung zwischen Laplace-Transformation und der momenterzeugenden Funktion her und betrachten ebenfalls Eigenschaften der Laplace-Transformation. Zum Abschluss dieses Kapitels stellen wir noch die drei, für diese Arbeit, wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen vor.

Wir merken noch an, dass wir in dieser Arbeit lediglich mit Riemann- und Lebesgue-Integralen arbeiten werden. Dabei fassen wir, falls nicht anders erwähnt, Integrale über stetigen Funktionen bezüglich des Lebesgue-Maßes stets als Riemann-Integrale auf und betrachten die restlichen Integrale als Lebesgue-Integrale.

Beginnen wir nun mit den grundlegenden Definitionen.

Definition 2.1. Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so nennen wir

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

die *Verteilungsfunktion* von X .

Wir bezeichnen X als *stetige Zufallsvariable* gdw. F_X eine absolut stetige Funktion ist. Existiert eine Funktion f_X , welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad (2.2)$$

erfüllt, so heißt f_X die *Dichte* von X .

Sei \mathbb{M} eine abzählbare Menge, so nennen wir eine Zufallsvariable X eine *diskrete Zufallsvariable*, falls sie nur Werte aus \mathbb{M} annimmt, d.h.

$$\sum_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{P}(X = x) = 1 \quad (2.3)$$

erfüllt ist.

Anmerkung: 1.) In dieser Arbeit wird ausschließlich $\mathbb{M} = \mathbb{N}_0$ gelten. Wir bezeichnen dann X als *diskrete Zufallsvariable auf \mathbb{N}_0* und definieren zudem

$$p_k := \mathbb{P}(X = k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

2.) Aus der Definition der Verteilungsfunktion erkennen wir zudem direkt, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (2.5)$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (2.6)$$

erfüllt sind.

3.) Wir merken zuletzt noch an, dass wir oft den Index der Verteilungsfunktion bzw. Dichte weglassen werden, wenn nur von einer Zufallsvariable die Rede ist.

Widmen wir uns nach diesen grundlegenden Definitionen nun der momenterzeugenden Funktion.

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F bzw. Schwanzfunktion \bar{F} mit

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Dann bezeichnen wir für alle $s \in (s_F^-, s_F^+)$, mit

$$M_F(s) := \mathbb{E}(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) \quad (2.8)$$

die *momenterzeugende Funktion* der Verteilung F . Dabei seien

$$s_F^- := \inf \{s \leq 0 : M_F(s) < \infty\} \quad (2.9)$$

sowie

$$s_F^+ := \sup \{s \geq 0 : M_F(s) < \infty\} \quad (2.10)$$

der *linke bzw. rechte Konvergenzradius* von M_F .

Wir stellen fest, dass M_F somit eine wohldefinierte, stetige und streng monoton wachsende Funktion für $s \in (s_F^-, s_F^+)$ ist, wobei $M_F(0) = 1$ gilt. Besitzt zudem F eine Dichte f , so lässt sich M_F darstellen mit

$$M_F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx. \quad (2.11)$$

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit dem Konvergenzradius und zeigen einige Formeln zur Bestimmung von s_F^+ bzw. s_F^- . Dazu benötigen wir folgende zwei Hilfsresultate.

Satz 2.2. *Sei $s_F^+ > 0$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x)$ für alle $s \in (0, s_F^+)$ und es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x) = 0. \quad (2.12)$$

Sei $s_F^- < 0$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{sx} F(x)$ für alle $s \in (s_F^-, 0)$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{sx} F(x) = 0. \quad (2.13)$$

Beweis. Zunächst merken wir an, dass aufgrund der Nichtnegativität von F, \bar{F} sowie e^x beide Grenzwerte ebenfalls nichtnegativ sein müssen.

Sei $s_F^+ > 0$ und $s \in (0, s_F^+)$. Dann gilt nach Definition s_F^+ und wegen $s > 0$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$\infty > M_F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sy} dF(y) \geq \int_{(x, \infty)} e^{sy} dF(y) \geq e^{sx}(1 - F(x)) = e^{sx} \bar{F}(x).$$

Somit existiert $\int_{(x,\infty)} e^{sy} dF(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir erhalten insbesondere

$$0 \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \int_{(x,\infty)} e^{sy} dF(y) = 0.$$

Also gilt

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}(x) = 0$$

und somit

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}(x) = 0.$$

Dies liefert uns die Existenz von $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}(x)$ und es gilt (2.12).

Die zweite Aussage lässt sich für ein $s \in (s_F^-, 0)$ wegen $s < 0$ mit

$$\infty > M_F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sy} dF(y) \geq \int_{(-\infty, x]} e^{sy} dF(y) \geq e^{sx}(F(x) - 0) = e^{sx}F(x)$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ analog beweisen. □

Satz 2.3. *Es gilt für alle $s \in (s_F^-, s_F^+)$*

$$M_F(s) - 1 = -s \int_{-\infty}^0 F(x) e^{sx} dx + s \int_0^{\infty} \overline{F}(x) e^{sx} dx. \quad (2.14)$$

Umgekehrt existiere für ein $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die rechte Seite von (2.14), dann gilt $s \in (s_F^-, s_F^+)$ und somit (2.14).

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Aussage. Der Fall $s = 0$ ist wegen $M_F(0) = 1$ trivialerweise erfüllt.

Sei nun $s \in (0, s_F^+)$, dann existiert nach Satz 2.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}(x) = 0$$

und wir erhalten somit insbesondere

$$[(1 - e^{sx}) \overline{F}(x)]_0^{\infty} = 0, \quad (2.15)$$

sowie wegen $s > 0$

$$[(e^{sx} - 1)F(x)]_{-\infty}^0 = 0. \quad (2.16)$$

Analog lässt sich zeigen, dass (2.15) und (2.16), aufgrund von (2.13) und $s < 0$, auch für den Fall $s \in (s_F^-, 0)$ erfüllt sind. Dies liefert uns nun mittels partieller Integration für alle $s \in (s_F^-, s_F^+) \setminus \{0\}$

$$M_F(s) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{sx} - 1) dF(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(-\infty,0]} (e^{sx} - 1) dF(x) + \int_{(0,\infty)} (e^{sx} - 1) dF(x) \\
&= [(e^{sx} - 1)F(x)]_{-\infty}^0 - s \int_{-\infty}^0 F(x)e^{sx} dx \\
&\quad + [(1 - e^{sx})\bar{F}(x)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \bar{F}(x)e^{sx} dx \\
&= -s \int_{-\infty}^0 F(x)e^{sx} dx + s \int_0^{\infty} \bar{F}(x)e^{sx} dx,
\end{aligned}$$

womit die erste Behauptung für alle $s \in (s_F^-, s_F^+)$ gezeigt wurde.

Beweisen wir nun die umgekehrte Richtung. Existiere zunächst die rechte Seite von (2.14) für ein $s > 0$. So gilt erneut (2.16) und wir erhalten

$$\infty > -s \int_{-\infty}^0 F(x)e^{sx} dx + s \int_0^{\infty} \bar{F}(x)e^{sx} dx + [(e^{sx} - 1)F(x)]_{-\infty}^0 - (1 - e^{s0})\bar{F}(0) := RS.$$

Für beliebiges $z > 0$ gilt somit, wegen $(1 - e^{sz})\bar{F}(z) < 0$ und partieller Integration,

$$\infty > RS \geq RS + (1 - e^{sz})\bar{F}(z) = \int_{(-\infty,z]} (e^{sx} - 1) dF(x).$$

Da $z > 0$ beliebig gewählt wurde, liefert Grenzwertbetrachtung $z \rightarrow \infty$ somit die Endlichkeit von $M_F(s)$ und damit die Behauptung.

Analog lässt sich der Fall $s < 0$, wegen $-(e^{sz} - 1)F(z) < 0$ für $z < 0$, beweisen. \square

Gleichung (2.14) ermöglicht uns nun eine notwendige sowie hinreichende Bedingung für ein $s_0 \neq 0$ mit $M_F(s_0) < \infty$ zu ermitteln.

Satz 2.4. *Sei $M_F(s_0) < \infty$ für ein $s_0 > 0$ erfüllt, dann existiert ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$\bar{F}(x) \leq be^{-s_0x}, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (2.17)$$

Ist hingegen (2.17) für ein $b > 0$ erfüllt, dann gilt $M_F(s) < \infty$ für alle $0 \leq s < s_0$.

Analog gelte $M_F(s_0) < \infty$ für ein $s_0 < 0$, dann existiert ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$F(x) \leq be^{-s_0x}, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (2.18)$$

Ist wiederum (2.18) für ein $b > 0$ erfüllt, dann gilt $M_F(s) < \infty$ für alle $s_0 < s \leq 0$

Beweis. Sei zunächst $M_F(s_0) < \infty$ für ein $s_0 > 0$. Wegen $F(y) \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ sowie der Monotonie von \bar{F} erhalten wir folgende zwei Ungleichungen

$$\int_{-\infty}^0 F(y)e^{s_0y} dy \leq \frac{1}{s_0}$$

und

$$\int_0^x \bar{F}(y)e^{s_0 y} dy \geq \bar{F}(x) \frac{e^{s_0 x} - 1}{s_0}, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Es gilt nach Voraussetzung $s_0 \in (0, s_F^+)$ und wir erhalten mittels Satz 2.3, sowie der Nichtnegativität von $\bar{F}(y)e^{s_0 y}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} \infty > \frac{M_F(s_0) - 1}{s_0} &= - \int_{-\infty}^0 F(y)e^{s_0 y} dy + \int_0^{\infty} \bar{F}(y)e^{s_0 y} dy \\ &\geq - \int_{-\infty}^0 F(y)e^{s_0 y} dy + \int_0^x \bar{F}(y)e^{s_0 y} dy \\ &\geq -\frac{1}{s_0} + \bar{F}(x) \frac{e^{s_0 x} - 1}{s_0}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also insbesondere wegen $\bar{F}(x) \leq 1$ sowie $s_0 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$M_F(s_0) \geq \bar{F}(x)e^{s_0 x} - \bar{F}(x) \geq \bar{F}(x)e^{s_0 x} - 1$$

und mit $b := M_F(s_0) + 1 \in \mathbb{R}_{>0}$ somit

$$\bar{F}(x) \leq be^{-s_0 x},$$

womit (2.17) erfüllt ist.

Zeigen wir nun die umgekehrte Richtung. Es gelte also (2.17) für ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(y)e^{s y} dy \leq \frac{b}{s_0 - s} < \infty$$

für alle $0 \leq s < s_0$. Somit existiert die rechte Seite von (2.14) und nach Satz 2.3 ist $M_F(s)$ endlich für alle $0 \leq s < s_0$.

Der zweite Teil des Satzes lässt sich analog beweisen. \square

Dank Satz 2.4 sind wir nun in der Lage s_F^- bzw. s_F^+ auf eine alternative Art zu bestimmen. Betrachten wir dazu folgenden Satz.

Satz 2.5. Falls $a^+ := \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} -x^{-1} \log \bar{F}(x) \in (0, \infty]$ ist, dann gilt

$$a^+ = s_F^+. \quad (2.19)$$

Falls $a^- := \overline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} -x^{-1} \log F(x) \in [-\infty, 0)$ ist, dann gilt

$$a^- = s_F^-. \quad (2.20)$$

Beweis. Wir zeigen lediglich (2.19). Sei $0 < \epsilon < a^+$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$-x^{-1} \log \bar{F}(x) \geq a^+ - \epsilon, \quad x > x_0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\bar{F}(x) \leq e^{-(a^+ - \epsilon)x}, \quad x > x_0.$$

Wählen wir nun $b \geq 1$ so, dass $\bar{F}(x) \leq be^{-(a^+ - \epsilon)x}$ im beschränkten Intervall $[0, x_0]$ gilt, so erhalten wir mittels Satz 2.4

$$M_F(s) < \infty, \quad s < a^+ - \epsilon.$$

Da ϵ beliebig klein gewählt wurde, gilt also insbesondere

$$M_F(s) < \infty, \quad s < a^+.$$

Somit folgt $a^+ \leq s_F^+$. Sei nun $M_F(s_0) < \infty$ für ein $s_0 > a^+$. Mittels Satz 2.4 existiert dann ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass (2.17) für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt ist. Also gilt

$$-x^{-1} \log \bar{F}(x) \geq -x^{-1} \log b + s_0, \quad x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Daraus folgt $a^+ \geq s_0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Es gilt also $a^+ \geq s_F^+$ und damit schließlich $a^+ = s_F^+$. \square

Folgerung 2.6. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ sowie F eine Verteilungsfunktion auf $[x_0, \infty)$. Dann gilt

$$s_F^- = -\infty.$$

Also existiert

$$M_F(s) = \int_{[x_0, \infty)} e^{sx} dF(x), \quad s < 0.$$

Beweis. Wegen $F(x) = 0$ für alle $x < x_0$ folgt die Behauptung direkt aus Satz 2.5. \square

Widmen wir uns nun einigen weiteren grundlegenden Eigenschaften der momenterzeugenden Funktion. Dazu merken wir noch an, dass wir anstatt M_F ebenfalls M_X für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_X schreiben können, wenn letztere keine übergeordnete Rolle spielt. Analoges gilt für s_F^+ bzw. s_F^- .

Beginnen wir zunächst mit der Eindeutigkeit für momenterzeugende Funktionen.

Satz 2.7. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y , sowie momenterzeugenden Funktionen M_X und M_Y derart, dass ein $\epsilon > 0$ existiert mit $M_X(s), M_Y(s) < \infty$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Dann gilt $F_X(x) = F_Y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $M_X(s) = M_Y(s)$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt.

Beweis. Auf den genauen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Er lässt sich allerdings in [2] nachlesen. \square

Betrachten wir als nächstes die momenterzeugende Funktion der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen.

Satz 2.8. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Bezeichne zudem $Y := \sum_{i=1}^n X_i$, so gilt

$$M_Y(s) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(s), \quad s \in \left(\max_{i=1, \dots, n} s_{X_i}^-, \min_{i=1, \dots, n} s_{X_i}^+ \right). \quad (2.21)$$

Sind zudem alle X_i identisch verteilt, so gilt insbesondere

$$M_Y(s) = (M_X(s))^n, \quad s \in (s_X^-, s_X^+). \quad (2.22)$$

Hierbei bezeichnet für alle $i = 1, \dots, n$, $M_X(s) = M_{X_i}(s)$ die gemeinsame momenterzeugende Funktion sowie $s_X^- = s_{X_i}^-$ bzw. $s_X^+ = s_{X_i}^+$ den gemeinsamen Konvergenzradius, der identisch verteilten X_i .

Wir erkennen somit insbesondere, dass dann ebenfalls

$$s_Y^- = s_X^-,$$

sowie

$$s_Y^+ = s_X^+$$

erfüllt sind.

Beweis. Der Beweis erfolgt elementar mittels des Erwartungswertoperators.

Sei also $s \in (\max_{i=1, \dots, n} s_{X_i}^-, \min_{i=1, \dots, n} s_{X_i}^+)$, dann existieren alle $M_{X_i}(s)$ und es gilt, aufgrund der Unabhängigkeit der X_i

$$\begin{aligned} \infty > \prod_{i=1}^n M_{X_i}(s) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{sX_i}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{sX_i}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{s\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \mathbb{E}(e^{sY}) \\ &= M_Y(s) \end{aligned}$$

womit (2.21) gezeigt wurde.

Die zweite Behauptung folgt direkt aus der Ersten, aufgrund der Gleichverteilung der X_i sowie Satz 2.7. \square

Anmerkung: Da die Verteilungsfunktion der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen, mit Verteilungsfunktionen F bzw. G , der Faltung $F * G$ entspricht, erhalten wir insbesondere

$$M_{F * G}(s) = M_F(s)M_G(s), \quad s \in (\max(s_F^-, s_G^-), \min(s_F^+, s_G^+)). \quad (2.23)$$

Dies werden wir später für die Laplace-Transformierte explizit nachrechnen und es auf die momenterzeugende Funktion für den Fall von Verteilungsfunktionen mit Dichte zurückführen.

Betrachten wir zum Schluss noch die Eigenschaft, welche es uns ermöglicht, Momente einer Zufallsvariable anhand ihrer momenterzeugenden Funktion zu bestimmen. Wir betrachten dazu den Spezialfall einer nichtnegativen Zufallsvariable, welcher für diese Arbeit ausreichend ist.

Satz 2.9. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und F eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty)$ und

$$M_F(s) = \int_{[0, \infty)} e^{sx} dF(x)$$

ihre momenterzeugende Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

Es existiere das k -te Moment $m_{k,F}$ von F . Dann existiert $M_F^{(l)}(s)$ mit $l = 0, 1, \dots, k$ für alle $s < 0$ und es gilt

$$M_F^{(l)}(s) = \int_{[0, \infty)} x^l e^{sx} dF(x), \quad s < 0, \quad l = 0, 1, \dots, k \quad (2.24)$$

sowie

$$\lim_{s \uparrow 0} M_F^{(l)}(s) = m_{l,F}, \quad l = 0, 1, \dots, k. \quad (2.25)$$

Alternativ existiere $M_F^{(k)}(s)$ für alle $s < 0$. Dann gilt (2.24). Existiere darüber hinaus

$$\lim_{s \uparrow 0} M_F^{(l)}(s) = a_{l,F} < \infty, \quad (2.26)$$

für ein $l \in \{0, 1, \dots, k\}$, so gilt

$$a_{l,F} = m_{l,F}. \quad (2.27)$$

Beweis. Wir erhalten zunächst allgemein für $l \neq 0$ wegen $0^l = 0$

$$\int_{[0, \infty)} x^l e^{sx} dF(x) = \int_{(0, \infty)} x^l e^{sx} dF(x). \quad (2.28)$$

Betrachten wir nun den ersten Teil des Satzes. Für $l = 0$ ist (2.24) trivial. Gelte nun (2.24) für alle $l < k$. Wir werden zeigen, dass dann (2.24) ebenfalls für $l + 1 \leq k$ erfüllt ist. Für $h \neq 0$ erhalten wir

$$\frac{M_F^{(l)}(s+h) - M_F^{(l)}(s)}{h} = \int_{(0, \infty)} x^{l+1} e^{sx} \frac{e^{xh} - 1}{xh} dF(x). \quad (2.29)$$

Zudem gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^t - 1}{t} \right| &= \left| \int_0^1 e^{tx} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |e^{tx}| dx \\ &\leq \begin{cases} e^t, & \text{wenn } t > 0 \\ 1, & \text{wenn } t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $s + h < 0, s < 0, x > 0$

$$\left| x^{l+1} e^{sx} \frac{e^{xh} - 1}{xh} \right| \leq \begin{cases} x^{l+1} e^{x(s+h)}, & \text{wenn } h > 0 \\ x^{l+1} e^{xs}, & \text{wenn } h < 0 \end{cases}.$$

Dies liefert letztendlich

$$\left| x^{l+1} e^{sx} \frac{e^{xh} - 1}{xh} \right| \leq x^{l+1}.$$

Da nach Voraussetzung $m_{l+1,F}$ existiert, ist x^{l+1} eine F -integrierbare Majorante des Integranden des Integrals auf der rechten Seite von (2.29). Mit dem Satz der majorisierten Konvergenz und (2.28) folgt dann

$$\begin{aligned} M_F^{(l+1)}(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M_F^{(l)}(s+h) - M_F^{(l)}(s)}{h} \\ &= \int_{(0,\infty)} x^{l+1} e^{sx} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{xh} - 1}{xh} dF(x) \\ &= \int_{[0,\infty)} x^{l+1} e^{sx} dF(x). \end{aligned}$$

Zudem folgt mittels Satz der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow 0} M_F^{(l)}(s) &= \int_{[0,\infty)} x^l \lim_{s \uparrow 0} e^{sx} dF(x) \\ &= \int_{[0,\infty)} x^l dF(x) \\ &= m_{l,F}. \end{aligned}$$

Somit wurde der erste Teil des Satzes bewiesen.

Existiere nun alternativ $M_F^{(k)}(s)$ für alle $s < 0$. Wir zeigen zunächst (2.24) und

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} M_F^{(l)}(s) = 0 \tag{2.30}$$

Für $l = 0$ ist dies wegen $F(0-) = 0$ trivial. Wir setzen nun wieder voraus, dass (2.24) und (2.30) für $l < k$ gelten. Dann erhalten wir für $l + 1 \leq k$ und alle $s < 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^s M_F^{(l+1)}(t) dt &= M_F^{(l)}(s) - 0 \\ &= \int_{[0, \infty)} x^l e^{sx} dF(x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Weiter gilt

$$e^{sx} = x \int_{-\infty}^s e^{tx} dt.$$

Also folgt mittels dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} x^l e^{sx} dF(x) &= \int_{[0, \infty)} x^{l+1} \int_{-\infty}^s e^{tx} dt dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^s \int_{[0, \infty)} x^{l+1} e^{tx} dF(x) dt. \end{aligned}$$

Wegen (2.31) gilt somit

$$\int_{-\infty}^s M_F^{(l+1)}(t) dt = \int_{-\infty}^s \left(\int_{[0, \infty)} x^{l+1} e^{tx} dF(x) \right) dt.$$

Dies liefert uns nun, da $s < 0$ beliebig gewählt wurde, für fast alle $t < 0$

$$M_F^{(l+1)}(t) = \int_{[0, \infty)} x^{l+1} e^{tx} dF(x). \quad (2.32)$$

Da die rechte Seite stetig bzgl. t ist und die linke nach Voraussetzung existiert, gilt

$$\int_{[0, \infty)} x^{l+1} e^{tx} dF(x) < \infty, \quad t < 0.$$

Insbesondere folgt wegen (2.26) mit dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\int_{[0, \infty)} x^{l+1} dF(x) < \infty.$$

Also existiert $m_{l+1, F}$ und nach dem ersten Teil des Satzes gilt (2.32) für alle $t < 0$. Wegen (2.25) folgt (2.27). \square

Anmerkung: 1.) Wir werden in dieser Arbeit nur Verteilungsfunktionen F betrachten, deren momenterzeugende Funktionen M_F in einem echten Intervall um 0 existieren. In diesem Fall lässt sich zeigen, dass die momenterzeugende Funktion stets unendlich oft differenzierbar ist und somit insbesondere alle Momente der Verteilung existieren. Zudem lässt sich dann (2.25) zu

$$M_F^{(l)}(0) = m_{l,F}, \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad (2.33)$$

umformulieren.

2.) Für den Fall von diskreten Zufallsvariablen, werden wir anstatt der momenterzeugenden Funktion die erzeugende Funktion

$$e_X(s) := \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad s \in [0, 1] \quad (2.34)$$

verwenden. Es lässt sich zeigen, dass diese, falls sie existiert, ebenfalls beliebig oft differenzierbar ist und die Berechnung der Momente mittels

$$\mathbb{E} \left[\binom{X}{l} \right] = \frac{e_X^{(l)}(1)}{l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad (2.35)$$

möglich ist. Dies liefert insbesondere für den Erwartungswert und die Varianz

$$\mathbb{E}X = e'_X(1) \quad (2.36)$$

sowie

$$\text{Var}X = e''_X(1) + e'_X(1) - (e'_X(1))^2. \quad (2.37)$$

Nachdem wir uns nun ausgiebig mit der momenterzeugenden Funktion beschäftigt haben, betrachten wir ein weiteres wichtiges analytisches Werkzeug, welches in engem Zusammenhang zur momenterzeugenden Funktion steht. Wir beschränken uns im Folgenden auf reelle Zahlen.

Definition 2.10. Sei f eine reellwertige Funktion, dann heißt die Funktion

$$\hat{L}_{f(u)}(s) = \mathcal{L}\{f(u)\} := \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du, \quad s \text{ mit } \hat{L}_{f(u)}(s) < \infty \quad (2.38)$$

die *Laplace-Transformation* zur Funktion f . Zusätzlich definieren wir mit

$$\hat{B}_{f(u)}(s) = \mathcal{B}\{f(u)\} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} f(u) du, \quad s \text{ mit } \hat{B}_{f(u)}(s) < \infty \quad (2.39)$$

die *zweiseitige Laplace-Transformation* zur Funktion f .

Zudem bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}(\hat{L}_{f(u)}) := \left\{ s \in \mathbb{R} : \hat{L}_{f(u)}(s) < \infty \right\} \quad (2.40)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{D}(\hat{B}_{f(u)}) := \left\{ s \in \mathbb{R} : \hat{B}_{f(u)}(s) < \infty \right\} \quad (2.41)$$

die Definitionsbereiche der Laplace-Transformierten.

Wir bemerken, dass der Unterschied zwischen beiden Laplace-Transformationen lediglich im Integrationsintervall liegt. Stellen wir nun die Zusammenhänge zwischen den Laplace-Transformationen und der momenterzeugenden Funktion einer Zufallsvariable her.

Satz 2.11. *Sei f eine reellwertige Funktion mit $f(u) = 0$ für alle $u < 0$, dann gilt*

$$\hat{B}_{f(u)}(s) = \hat{L}_{f(u)}(s), \quad s \in \mathcal{D}(\hat{B}_{f(u)}). \quad (2.42)$$

In diesem Fall gilt also $\mathcal{D}(\hat{L}_{f(u)}) = \mathcal{D}(\hat{B}_{f(u)})$.

Sei f nun zusätzlich die Dichte einer nichtnegativen Zufallsvariable X und existiere die momenterzeugende Funktion $M_X(s)$ für alle $s \in (s_X^-, s_X^+)$, dann gilt

$$\hat{B}_{f(u)}(s) = \hat{L}_{f(u)}(s) = M_X(-s), \quad s \in \mathcal{D}(\hat{B}_{f(u)}). \quad (2.43)$$

Es gilt somit insbesondere $\mathcal{D}(\hat{B}_{f(u)}) = \mathcal{D}(\hat{L}_{f(u)}) = (-s_X^+, -s_X^-)$.

Beweis. Der Beweis folgt unweigerlich aus den entsprechenden Definitionen. □

Im letzten Satz haben wir bereits einige Existenzeigenschaften für die Laplace-Transformierten gesehen. Wir widmen uns nun noch einer weiteren Eigenschaft von $\mathcal{D}(\hat{L}_{f(u)})$ für beschränkte Funktionen.

Satz 2.12. *Sei $M \in \mathbb{R}$ und f eine reellwertige Funktion mit $|f(u)| \leq M$ für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt*

$$(0, \infty) \subseteq \mathcal{D}(\hat{L}_{f(u)}) \quad (2.44)$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \hat{L}_{f(u)}(s) \right| &= \left| \int_0^\infty e^{-su} f(u) \, du \right| \leq \int_0^\infty e^{-su} |f(u)| \, du \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-su} \, du = \frac{M}{s} < \infty, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt wurde. □

Kommen wir nun zu den Haupteigenschaften der Laplace-Transformierten. Wir merken an, dass nach Satz 2.11 beide Transformationen, im Fall von nichtnegativen Funktionen, die selben Eigenschaften besitzen. Zudem werden wir im folgenden Satz $s \in \mathbb{R}$ stets so wählen, dass alle auftretenden Größen existieren. Zuletzt werden wir lediglich beschränkte Funktionen betrachten, da dies hinreichend für diese Arbeit ist.

Satz 2.13. Seien f und g zwei reellwertige, beschränkte Funktionen. Dann gilt

$$\hat{B}_{f(u)+g(u)}(s) = \hat{B}_{f(u)}(s) + \hat{B}_{g(u)}(s). \quad (2.45)$$

Zudem erfüllt die zweiseitige Laplace-Transformation, für beliebiges $c \in \mathbb{R}$, folgende Verschiebungseigenschaft der Ursprungsfunktion

$$\hat{B}_{f(u+c)}(s) = e^{cs} \hat{B}_{f(u)}(s). \quad (2.46)$$

Wir erhalten zudem folgende Faltungseigenschaft für die Laplace-Transformierte

$$\hat{L}_{\int_0^u f(v)g(u-v) dv}(s) = \hat{L}_{f(u)}(s) \hat{L}_{g(u)}(s), \quad (2.47)$$

falls $g(u) = 0$ für alle $u < 0$ erfüllt ist.

Sei nun f zusätzlich differenzierbar und zudem $s \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt

$$\hat{L}_{f'(u)}(s) = s \hat{L}_{f(u)}(s) - f(0). \quad (2.48)$$

Sei g Riemann-integrierbar, mit beschränkter Stammfunktion $G(u) := \int_0^u g(v) dv$ und zudem $s \in \mathbb{R}_{>0}$, dann erhalten wir

$$\hat{B}_{G(u)}(s) = s^{-1} \hat{B}_{g(u)}(s). \quad (2.49)$$

Beweis. Der Beweis der Additivität der zweiseitigen Laplace-Transformierten erfolgt unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft für Integrale.

Widmen wir uns also der Verschiebung der Ursprungsfunktion. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt, so gilt

$$\begin{aligned} \hat{B}_{f(u+c)}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} f(u+c) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(u'-c)} f(u') du' \\ &= e^{sc} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su'} f(u') du' = e^{sc} \hat{B}_{f(u)}(s), \end{aligned}$$

womit (2.46) gezeigt wurde.

Aufgrund der Beschränktheit der Funktionen und des Integrals existiert die Faltung und wir erhalten wegen $g(u) = 0$ für alle $u < 0$ und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\int_0^u f(v)g(u-v) dv}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-su} \int_0^u f(v)g(u-v) dv du = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-su} f(v)g(u-v) dv du \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-v}^{\infty} e^{-s(u'+v)} f(v)g(u') du' dv = \int_0^{\infty} e^{-su'} g(u') du' \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v) dv \\ &= \hat{L}_{f(u)}(s) \hat{L}_{g(u)}(s). \end{aligned}$$

Damit wurde ebenfalls (2.47) gezeigt.

Sei f nun zudem differenzierbar, so existiert f' und es gilt mittels partieller Integration sowie wegen der Beschränktheit von f und $s \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\hat{L}_{f'(u)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f'(u) du = [e^{-su} f(u)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du$$

$$= s\hat{L}_{f(u)}(s) - f(0),$$

womit (2.48) gültig ist.

Sei also letztendlich g zusätzlich Riemann-integrierbar. Wegen $g(u) = 0$ für $u < 0$ gilt insbesondere $G(u) = 0$ für $u < 0$. Wir erhalten somit zusätzlich wegen $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Beschränktheit von $G(u)$

$$\begin{aligned}\hat{B}_{G(u)}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}G(u) \, du = [-s^{-1}e^{-su}G(u)]_{-\infty}^{\infty} + s^{-1} \int_0^{\infty} e^{-su}g(u) \, du \\ &= s^{-1}\hat{B}_{g(u)}(s).\end{aligned}$$

Somit wurden alle Behauptungen gezeigt. \square

Anmerkung: Da die Dichte der Faltung zweier unabhängiger Zufallsvariablen der Faltung der Dichten selbiger entspricht, liefert uns (2.47) in Zusammenhang mit Satz 2.11 erneut unsere Faltungseigenschaft (2.23) der momenterzeugenden Funktion.

Zuletzt betrachten wir eine Eindeutigkeitsaussage für zweiseitige Laplace-Transformierte, welche wir später benötigen werden. Wir fassen dazu im Folgenden alle Integrale als Lebesgue-Integrale bezüglich des Lebesgue-Maßes auf. Es gilt dann folgendes Hilfsresultat.

Satz 2.14. *Seien f und g nichtnegative, integrierbare Funktionen. Existieren zudem $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so dass $\hat{B}_{f(u)}(s) = \hat{B}_{g(u)}(s) < \infty$ für alle $s \in (a, b)$ erfüllt ist, dann gilt $f(u) = g(u)$ für fast alle $u \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir werden an dieser Stelle nur eine grobe Beweisskizze darstellen. Der genaue Beweis lässt sich in [3] nachlesen.

Zunächst sichert uns die Parametrisierung $s' = s - (a + b)/2$, dass s' zu einem offenem Intervall mit 0 gehört. Dabei entstehen Hilfsfunktionen $h(u) = e^{-(a+b)u/2}f(u)$ bzw. $k(u) = e^{-(a+b)u/2}g(u)$.

Als nächstes betrachtet man die zweiseitigen Laplace-Transformierten von h und k im Punkt $s' = 0$. Nach Voraussetzung sind beide identisch und endlich.

Sind diese nun 0 so folgt, dass $h(u) = k(u) = 0$ fast überall, aufgrund der Nichtnegativität von h und k , gültig ist und dies somit auch für f und g gilt. Somit wurde die Behauptung gezeigt.

Gilt hingegen $\hat{B}_{h(u)}(0) = \hat{B}_{k(u)}(0) = c$, für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so lassen sich die Funktionen h und k zu $h'(u) = h(u)/c$ bzw. $k'(u) = k(u)/c$ normieren und bilden somit eine Dichte. Somit folgt die Behauptung aus dem Eindeigkeitssatz für momenterzeugende Funktionen sowie dem Zusammenhang zwischen momenterzeugender Funktion und zweiseitiger Laplace-Transformation (siehe Sätze 2.7 sowie 2.11). \square

Satz 2.14 ermöglicht es uns nun folgende Eindeutigkeitsaussage zur zweiseitigen Laplace-Transformierten zu treffen.

Satz 2.15. *Seien f und g integrierbare Funktionen. Existieren zudem $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so dass $\hat{B}_{f(u)}(s) = \hat{B}_{g(u)}(s) < \infty$ für alle $s \in (a, b)$ erfüllt ist, dann gilt $f(u) = g(u)$ für fast alle $u \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Analog zum vorangegangenen Satz, werden wir wieder lediglich eine Beweisskizze angeben. Der exakte Beweis findet sich erneut in [3].

Wir definieren zunächst $h(u) := f(u) - g(u)$. Nach Voraussetzung ist die zweiseitige Laplace-Transformierte von h im Intervall (a, b) identisch 0.

Definieren wir nun zudem $h^+(u) := \max(0, h(u))$ sowie $h^-(u) := -\min(0, h(u))$, so gilt $h(u) = h^+(u) - h^-(u)$, wobei sowohl Positiv- als auch Negativteil von h nichtnegative Funktionen bilden, deren zweiseitige Laplace-Transformierte auf (a, b) identisch ist.

Somit gilt nach Satz 2.14, dass beide f.ü. identisch sind, woraus folgt das $h(u) = 0$ f.ü. gilt. Damit wurde die Behauptung gezeigt. \square

Anmerkung: 1.) Es reicht im obigen, Lebesgue-Messbarkeit für die Funktionen zu fordern. Die Integrierbarkeit folgt dann unweigerlich aus der Existenz der entsprechenden Laplace-Transformierten und zusätzlicher Parametrisierung, analog zum Beweis von Satz 2.14. Wir werden uns in dieser Arbeit allerdings lediglich mit Lebesgue-messbaren Funktionen befassen, weswegen wir diese Voraussetzung vernachlässigen können.

2.) Wir stellen zudem fest, dass die Umkehrung des obigen Satzes direkt aus der Definition der zweiseitigen Laplace-Transformierten folgt.

Als letztes werden wir uns in diesem Kapitel mit den drei, für diese Arbeit, wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren grundlegenden Eigenschaften beschäftigen. Dazu beginnen wir mit einer diskreten Verteilung auf \mathbb{N}_0 , der Poisson-Verteilung.

Wir erinnern an dieser Stelle an die Definition der erzeugenden Funktion (2.34), sowie den Formeln (2.36) und (2.37) zur Berechnung der Momente einer diskreten Zufallsvariable.

Definition 2.16. Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf \mathbb{N}_0 und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir bezeichnen X als *Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ* (kurz $X \sim Poi(\lambda)$), falls

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.50)$$

erfüllt ist.

Satz 2.17. *Sei $X \sim Poi(\lambda)$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt für alle $s \in [0, 1]$*

$$e_X(s) = e^{\lambda(s-1)}. \quad (2.51)$$

Also existieren alle Momente der Verteilung und es gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad (2.52)$$

sowie

$$\text{Var}(X) = \lambda. \quad (2.53)$$

Beweis. Aufgrund der Reihendarstellung der e -Funktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

für beliebige $x \in \mathbb{R}$, gilt für alle $s \in [0, 1]$

$$e_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)},$$

womit (2.51) gezeigt wurde.

Da die erzeugende Funktion für alle $s \in [0, 1]$ existiert, ist sie somit insbesondere beliebig oft differenzierbar, womit alle Momente der Verteilung existieren. Wegen

$$e'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \text{ sowie } e''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$$

für alle $s \in [0, 1]$ erhalten wir somit nach (2.36) und (2.37) insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = e'_X(1) = \lambda \text{ und } \text{Var}(X) = e''_X(1) + e'_X(1) - (e'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

womit ebenso (2.52) sowie (2.53) bewiesen wurden. \square

Kommen wir nun zu den beiden stetigen Verteilungsfunktionen, welche uns in dieser Arbeit begleiten werden. Wir beginnen mit der Exponentialverteilung.

Definition 2.18. Sei X eine stetige Zufallsvariable und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir bezeichnen X als *exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ* (kurz $X \sim \text{Exp}(\lambda)$), falls

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

die Verteilungsfunktion von X ist.

Wir erkennen, dass es sich bei der Exponentialverteilung um eine Verteilung auf $[0, \infty)$ handelt. Somit gilt nach Satz 2.5 sowie Folgerung 2.6

$$s_F^- = -\infty \text{ und } s_F^+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda = \lambda.$$

Wir erhalten also folgende Eigenschaften der Exponentialverteilung.

Satz 2.19. Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so besitzt X die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

und es gilt für alle $s \in (-\infty, \lambda)$

$$M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}. \quad (2.56)$$

Somit existieren alle Momente der Verteilung und es gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.57)$$

sowie

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.58)$$

Beweis. Da F_X eine stetige, differenzierbare Funktion mit

$$F'_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

ist, folgt (2.55) direkt aus der Beziehung $F'_X(x) = f_X(x)$.

Widmen wir uns nun der momenterzeugenden Funktion. Wir hatten bereits festgestellt, dass diese überall in $(-\infty, \lambda)$ existieren muss. Sei nun also $s \in (-\infty, \lambda)$, dann gilt

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{e^{-(\lambda-s)x}}{\lambda-s} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-s},$$

womit (2.56) gezeigt wurde.

Wir erkennen, dass $M_X(s)$ in $(-\infty, \lambda)$ unendlich oft differenzierbar und aufgrund von $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ insbesondere in 0 differenzierbar ist. Somit existieren nach Satz 2.9 alle Momente von X und wir erhalten wegen

$$M'_X(s) = \frac{\lambda}{(\lambda-s)^2} \text{ und } M''_X(s) = \frac{2\lambda}{(\lambda-s)^3}$$

für alle $s \in (-\infty, \lambda)$ insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = M'_X(0) = \frac{1}{\lambda} \text{ sowie } \text{Var}(X) = M''_X(0) - (M'_X(0))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Damit wurden (2.57) und (2.58) bewiesen. □

Zuletzt betrachten wir noch die Erlang-Verteilung, welche als Summe von unabhängigen, exponentialverteilten Zufallsvariablen hervorgeht.

Definition 2.20. Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}$ sowie $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ . Wir bezeichnen dann $Y := \sum_{i=1}^n X_i$ als *Erlang-verteilte Zufallsvariable mit Parametern n und λ* (kurz $X \sim \text{Erl}(n, \lambda)$).

Aus der Definition erkennen wir direkt, dass im Falle von $n = 1$ die Erlang-Verteilung der Exponentialverteilung entspricht. Wir merken zudem an, dass die Erlang-Verteilung ein Spezialfall der Gammaverteilung ist. Diese erweitert die Erlang-Verteilung auf den allgemeineren Fall $n \in \mathbb{R}_{>0}$. Widmen wir uns nun den Eigenschaften der Erlang-Verteilung.

Satz 2.21. *Sei $X \sim \text{Erl}(n, \lambda)$ mit Parametern $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so besitzt X die Verteilungsfunktion*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0, \end{cases} \quad (2.59)$$

sowie die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Es gilt zudem für alle $s \in (-\infty, \lambda)$

$$M_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^n. \quad (2.61)$$

Somit existieren alle Momente der Verteilung und es gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{\lambda} \quad (2.62)$$

sowie

$$\text{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}. \quad (2.63)$$

Beweis. Wir beweisen die Verteilungsfunktion induktiv nach n . Der Fall $n = 1$ ist wegen $\text{Erl}(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$ nach Definition 2.18 erfüllt. Gelte also die Verteilungsfunktion für $X \sim \text{Erl}(n, \lambda)$ und sei $X_{n+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$ eine von X unabhängige Zufallsvariable, so erhalten wir mittels Faltungsformel für $Y := X + X_{n+1}$ und $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \int_{-\infty}^x F_X(x-y) f_{X_{n+1}}(y) dy = \int_0^x \left(1 - e^{-\lambda(x-y)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda(x-y))^i}{i!} \right) \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= [-e^{-\lambda y}]_0^x - \lambda e^{-\lambda x} \int_0^x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda(x-y))^i}{i!} = 1 - e^{-\lambda x} \left[1 + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^x \frac{(\lambda(x-y))^i}{i!} dy \right] \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda(x-y))^{i+1}}{(i+1)!} \right] = 1 - e^{-\lambda x} \left[1 + \sum_{i'=1}^n \frac{(\lambda(x-y))^{i'}}{(i')!} \right] \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i'=0}^n \frac{(\lambda x)^{i'}}{(i')!}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung (2.59) nach Definition 2.20 gezeigt wurde. Da F_X eine stetige, differenzierbare Funktion mit

$$F'_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

ist, folgt (2.60) erneut direkt aus der Beziehung $F'_X(x) = f_X(x)$.

Die momenterzeugende Funktion der Verteilung folgt nun direkt aus Satz 2.21 sowie der Definition 2.20 der Erlang-Verteilung.

Es existieren also erneut alle Momente der Verteilung und wegen

$$M'_X(s) = \frac{n\lambda^n}{(\lambda - s)^{n+1}} \text{ und } M''_X(s) = \frac{n(n+1)\lambda}{(\lambda - s)^{n+2}}$$

für alle $s \in (-\infty, \lambda)$, gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = M'_X(0) = \frac{n}{\lambda} \text{ sowie } \text{Var}(X) = M''_X(0) - (M'_X(0))^2 = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Damit wurden (2.62) und (2.63) bewiesen. □

3. Der Poisson-Prozess

Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel alle Grundlagen gelegt haben, werden wir uns in diesem Kapitel dem zusammengesetzten Poisson-Prozess und einigen seiner fundamentalen Eigenschaften widmen. Dieser wichtige Prozess wird eine entscheidende Rolle in unserem Ruinmodell spielen. Dazu betrachten wir zunächst den Spezialfall des Poisson-Prozesses. Zuvor definieren wir uns noch stochastische Prozesse, sowie die wichtigsten Größen selbiger.

Definition 3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und T eine Indexmenge. Eine Folge von reellen Zufallsvariablen $\{X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in T}$ bezeichnen wir als *stochastischer Prozess*.

Anmerkung: Wir werden im Folgenden, falls nicht anders erwähnt, die Indexmenge $T = \mathbb{R}_{\geq 0}$ verwenden und werden zudem meist kurz $X(t)$ für einen stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ schreiben. Die äquivalente Schreibweise X_t benutzen wir hingegen als Symbolik für die Zufallsvariablen des Prozesses.

Definition 3.2. Sei $X(t)$ ein stochastischer Prozess, dann bezeichnen wir für alle $\omega \in \Omega$ die Abbildung $X(\cdot, \omega) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$ als *Pfad* des Prozesses.

Sind dabei alle Pfade von $X(t)$ rechtsstetig mit linksseitigen Grenzwert, so nennen wir $X(t)$ stochastischen Prozess mit *càdlàg-Pfaden*.

Seien zuletzt $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$, so definieren wir die Zufallsvariable $X_t - X_s$ als *Zuwachs* des stochastischen Prozesses von s nach t .

Sind dabei für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ stochastisch unabhängig, so bezeichnen wir $X(t)$ als stochastischen Prozess mit *unabhängigen Zuwächsen*.

Hängt die Verteilung der Zufallsvariablen $X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}$ für alle $n \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{R}_{> 0}$ und jede Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, nicht von der Wahl von h ab, so nennen wir $X(t)$ stochastischen Prozess mit *stationären Zuwächsen*.

Damit sind die wichtigsten Grundlagen gelegt und wir betrachten nun den Poisson-Prozess. Dieser stochastische Prozess wird uns als Ausgangspunkt für den zusammengesetzten Poisson-Prozess dienen. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten einen Poisson-Prozess zu definieren. Wir werden hier eine vorstellen, aus dieser die wichtigsten Eigenschaften ermitteln und uns danach dem zusammengesetzten Poisson-Prozess widmen.

Definition 3.3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$ und $N_\lambda(t)$ ein stochastischer Prozess mit càdlàg-Pfaden über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. So heißt $N_\lambda(t)$ *Poisson-Prozess mit Intensität λ* , falls er folgende Bedingungen erfüllt:

- $N_{\lambda,0} = 0, (\mathbb{P} - f.s.)$
- Die Zuwächse sind Poisson-verteilt, d.h. $N_{\lambda,t} - N_{\lambda,s} \sim Poi(\lambda(t - s)), \quad s < t$
- Die Zuwächse sind unabhängig.

Im Folgenden werden wir nur noch kurz $N(t)$ für den Poisson-Prozess mit der Intensität λ schreiben. Aus der Definition lässt sich erkennen, dass der Poisson-Prozess ein stochastischer Prozess mit Werten in \mathbb{N}_0 ist. Es handelt sich also um einen diskreten Prozess in kontinuierlicher Zeit. Widmen wir uns nun einigen weiteren grundlegenden Eigenschaften.

Satz 3.4. *Sei $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann besitzt $N(t)$ stationäre Zuwächse und monoton wachsende Pfade. Zudem gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$*

$$N_t \sim \text{Poi}(\lambda t), \quad (3.1)$$

womit die erzeugende Funktion

$$e_{N_t}(s) = e^{\lambda t(s-1)} \quad (3.2)$$

für alle $s \in [0, 1]$ existiert. Somit existieren ebenfalls alle Momente von N_t und wir erhalten insbesondere

$$\mathbb{E}(N_t) = \lambda t \text{ sowie } \text{Var}(N_t) = \lambda t. \quad (3.3)$$

Definieren wir nun für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Sprungzeitpunkte $\sigma_i := \min_{t \in [0, \infty)} \{N_t = i\}$ sowie den Zeitraum zwischen den Zuwächsen $T_{i+1} := \sigma_{i+1} - \sigma_i$ mit $T_0 := 0$. Aufgrund der càdlàg-Pfade des Poisson-Prozesses sind diese Größen wohldefiniert. Es gilt dann für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Darstellung

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[\sigma_k, \infty)}(t), \quad (3.4)$$

wobei $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion bezeichnet. Zudem ist der Zeitraum zwischen den Zuwächsen exponentialverteilt mit Parameter λ , d.h. für alle $i \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda), \quad (3.5)$$

womit insbesondere wegen $\sigma_i = \sum_{j=1}^i T_j$

$$\sigma_i \sim \text{Erl}(i, \lambda) \quad (3.6)$$

gilt. Somit ist der Poisson-Prozess gedächtnislos, d.h. für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist

$$\mathbb{P}(T_i > t + s \mid T_i > t) = \mathbb{P}(T_i > s) \quad (3.7)$$

erfüllt. Zuletzt beobachten wir noch, dass die Verteilung der Sprungstellen in einem festen Intervall einer stetigen Gleichverteilung entspricht, d.h. mit $x, h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in [x, x + h]$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(\sigma_i \leq s \mid N_x = i - 1, N_{x+h} = i) = \frac{s - x}{h}, \quad (3.8)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Stationarität der Zuwächse sowie die Monotonie der Pfade folgen unweigerlich mit der zweiten Eigenschaft des Poisson-Prozesses aus Definition 3.3. Zudem liefert diese für $s = 0$, zusätzlich mithilfe der ersten Eigenschaft, Behauptung (3.1). Die Folgebehauptungen (3.2) sowie (3.3) erhalten wir dann aus Satz 2.17.

Widmen wir uns nun der alternativen Darstellung (3.4) des Poisson-Prozesses. Diese folgt unweigerlich aus der Definition der Sprungzeitpunkte, da $N_t = n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ genau dann erfüllt ist, wenn $n \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$ gilt.

Zeigen wir also nun als nächstes, dass die Zeiträume zwischen den Zuwächsen exponentialverteilt sind. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i \leq x \mid \sigma_{i-1} = s) &= 1 - \mathbb{P}(T_i > x \mid \sigma_{i-1} = s) = 1 - \mathbb{P}(N_{s+x} - N_s = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda((s+x)-s)} = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen, weil der Zeitraum zwischen dem $(i-1)$ -ten und i -ten Sprung, unter der Voraussetzung, dass der $(i-1)$ -te Sprung zum Zeitpunkt s erfolgte, genau dann größer als x ist, falls im Zeitraum von s bis $s+x$ kein Sprung auftritt. Wir erhalten nun mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für beliebiges $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_{T_i}(x) &= \mathbb{P}(T_i \leq x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_i \leq x \mid \sigma_{i-1} = s) dF_{\sigma_{i-1}}(s) \\ &= (1 - e^{-\lambda x}) \int_0^\infty dF_{\sigma_{i-1}}(s) = 1 - e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

womit (3.5) nach Definition 2.18 der Exponentialverteilung folgt. Aufgrund der Definition der Zeiträume zwischen den Zuwächsen sowie Eigenschaften einer alternierenden Reihe und $\sigma_0 = 0$ folgt die Darstellung $\sigma_i = \sum_{j=1}^i T_j$. Somit gilt (3.6) unweigerlich aufgrund der Definition 2.20 der Erlang-Verteilung.

Betrachten wir nun die Gedächtnislosigkeit des Prozesses. Diese folgt aufgrund der Exponentialverteilung der Zeiträume zwischen den Zuwächsen. Wir erhalten für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i > t+s \mid T_i > t) &= \frac{\mathbb{P}(T_i > t+s, T_i > t)}{\mathbb{P}(T_i > t)} = \frac{\mathbb{P}(T_i > t+s)}{\mathbb{P}(T_i > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T_i > s), \end{aligned}$$

womit Behauptung (3.7) gezeigt ist.

Widmen wir uns zuletzt Behauptung (3.8). Wir erinnern an dieser Stelle an die Unabhängigkeit der Zuwächse des Poisson-Prozesses (nach Definition 3.3). Somit gilt für $s, x, h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \in [x, x+h]$ und $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_i > s \mid N_x = i-1, N_{x+h} = i) &= \frac{\mathbb{P}(\sigma_i > s, N_x = i-1, N_{x+h} = i)}{\mathbb{P}(N_x = i-1, N_{x+h} = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_x = i-1, N_s - N_x = 0, N_{x+h} - N_s = 1)}{\mathbb{P}(N_x = i-1, N_{x+h} - N_x = 1)} \end{aligned}$$

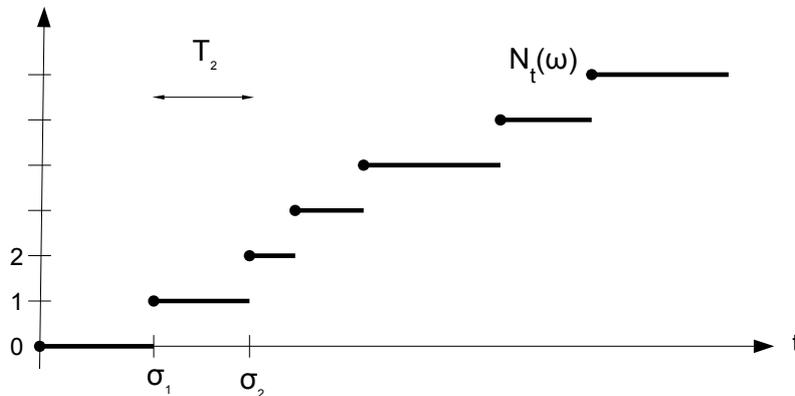
$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(s-x)} \lambda(x+h-s) e^{-\lambda(x+h-s)}}{\frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda x} \lambda h e^{-\lambda h}} \\
&= 1 - \frac{s-x}{h}.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\mathbb{P}(\sigma_i \leq s \mid N_x = i-1, N_{x+h} = i) = \frac{s-x}{h}.$$

Dies entspricht der Verteilungsfunktion einer stetig gleichverteilten Zufallsvariable auf dem Intervall $[x, x+h]$ und somit ist (3.8) gezeigt. \square

Zusammengefasst erkennen wir also, dass es sich beim Poisson-Prozess um einen Zählprozess handelt, mit Sprüngen der Höhe 1. Es werden dabei pro Zeiteinheit genau λ Sprünge erwartet und der Zeitabstand zwischen zwei Sprüngen ist exponentialverteilt. Ein Beispielpfad für einen Poisson-Prozess kann also wie folgt aussehen.



Grafik 3.1. - Beispielpfad eines Poisson-Prozesses

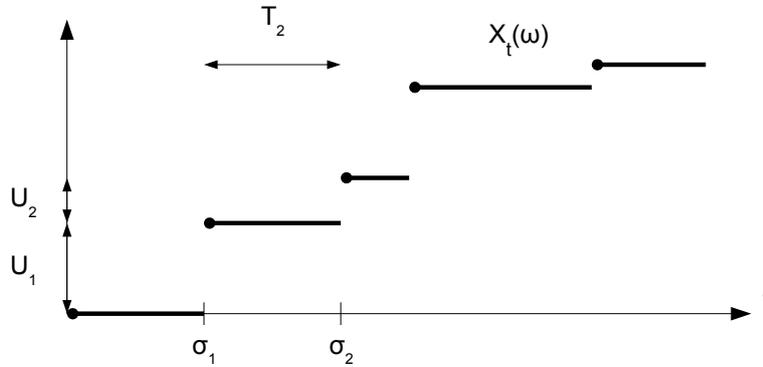
Nachdem wir nun mit dem Poisson-Prozess und seinen Eigenschaften die Grundlagen gelegt haben, werden wir im Folgenden den zusammengesetzten Poisson-Prozess definieren. Im Gegensatz zum Poisson-Prozess wird dieser beliebige, aber gleichverteilte und unabhängige Sprunghöhen zulassen.

Definition 3.5. Sei $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, welche zudem für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ unabhängig von N_t sind. Dann bezeichnen wir den stochastischen Prozess $X(t)$ mit

$$X(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} U_i \quad (3.9)$$

als *zusammengesetzten Poisson-Prozess* mit Charakteristiken λ und F_U (in Kurzform $X(t) \sim ZPoi(\lambda, F_U)$), wobei F_U die Verteilungsfunktion der Sprunghöhen U_1, U_2, \dots bezeichnet.

Im Gegensatz zum Poisson-Prozess nimmt der zusammengesetzte Poisson-Prozess also nicht zwangsweise nur diskrete Werte an. Sein Bildbereich ist also abhängig von der Verteilung F_U der Sprunghöhen. Wir bemerken bereits, dass die Sprungzeitpunkte lediglich vom Zählprozess $N(t)$ abhängig sind. Somit werden sich ihre Eigenschaften auf den zusammengesetzten Poisson-Prozess übertragen.



Grafik 3.2. - Beispielpfad eines zus. Poi. Proz. mit $F(0) = 0$

Betrachten wir nun die für diese Arbeit wichtigsten Eigenschaften des zusammengesetzten Poisson-Prozesses.

Satz 3.6. Sei $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U . Dann ist $X(t)$ ein stochastischer Prozess mit càdlàg-Pfaden und $X_0 = 0$. Darüber hinaus besitzt er unabhängige, stationäre Zuwächse.

Sei für alle $s \in (s_{F_U}^-, s_{F_U}^+)$ die momenterzeugende Funktion $M_U(s)$ der Schadenshöhen U_1, U_2, \dots gegeben. Dann existiert für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in (s_{F_U}^-, s_{F_U}^+)$ die momenterzeugende Funktion $M_{X_t}(s)$ und es gilt

$$M_{X_t}(s) = e^{\lambda t(M_U(s)-1)}. \quad (3.10)$$

Existieren alle Momente von U_1 , so existieren damit auch alle Momente von X_t und es gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(U_1) \quad (3.11)$$

sowie

$$\text{Var}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(U_1^2). \quad (3.12)$$

Definieren wir nun wieder die Sprungzeiten σ_i sowie die Zeiträume zwischen den Zuwächsen T_i analog zu Satz 3.4, so gelten (3.5) bis (3.7) unverändert für den zusammengesetzten Poisson-Prozess $X(t)$. Zudem erhalten wir die Darstellung

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \mathbb{1}_{[\sigma_k, \infty)}(t), \quad (3.13)$$

wobei $\mathbb{1}$ erneut die Indikatorfunktion bezeichnet.

Wir merken zudem an, dass für beliebiges $a \in \mathbb{R}_{>0}$ der Prozess $Y(t) := aX(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_{aU} ist. Dabei sei

$$F_{aU}(x) := F_U(x/a), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Besitze zuletzt die Verteilungsfunktion F_U eine Dichte f_U und gelte $F_U(0) = 0$, so gilt für alle $t, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die folgende Darstellung der Verteilungsfunktion von X_t

$$F_{X_t}(x) = e^{-\lambda t} + \int_0^x \tilde{f}_{X_t}(y) dy. \quad (3.14)$$

Hierbei sei $\tilde{f}_{X_t}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda t)^n / n!) e^{-\lambda t} f_{U^{n*}}(y)$ und $f_{U^{n*}}(y)$ bezeichne die Dichte der n -fachen Faltung von U .

Beweis. Sei $\omega \in \Omega$ beliebig gewählt. Da $N(t)$ nach Definition 3.3 càdlàg-Pfade besitzt, existiert $N_{t-}(\omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und es gilt zudem $N_{t+}(\omega) = N_t(\omega)$. Somit existiert

$$X_{t-}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{t-}(\omega)} U_i(\omega)$$

und die Gleichung

$$X_{t+}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{t+}(\omega)} U_i(\omega) = \sum_{i=1}^{N_t(\omega)} U_i(\omega) = X_t(\omega)$$

ist erfüllt. Also besitzt $X(t)$ ebenfalls càdlàg-Pfade und wegen $N_0 = 0$ sowie der Definition einer leeren Summe erhalten wir $X_0 = 0$.

Zeigen wir als nächstes die Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse. Nach Definition 3.2 reicht es dabei zu zeigen, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und jede Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen

$$\sum_{i_1=N_{t_0+h}+1}^{N_{t_1+h}} U_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=N_{t_{n-1}+h}+1}^{N_{t_n+h}} U_{i_n}$$

unabhängig sind und ihre Verteilung nicht von h abhängig ist. Da die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt sind und ebenfalls unabhängig von N_t sind, erhalten wir mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für beliebige $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sum_{i_1=N_{t_0+h}+1}^{N_{t_1+h}} U_{i_1} \leq x_1, \dots, \sum_{i_n=N_{t_{n-1}+h}+1}^{N_{t_n+h}} U_{i_n} \leq x_n \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} \prod_{j=1}^n F_U^{*k_j}(x_j) \mathbb{P}(N_{t_1+h} - N_{t_0+h} = k_1, \dots, N_{t_n+h} - N_{t_{n-1}+h} = k_n), \end{aligned}$$

womit die Behauptung, nach Definition 3.3 und Satz 3.4, aus der Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse von $N(t)$ folgt.

Existiere nun für $s \in (s_{F_U}^-, s_{F_U}^+)$ die momenterzeugende Funktion der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dann gilt für alle $s \in (s_{F_U}^-, s_{F_U}^+)$ mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, sowie der Unabhängigkeit der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von N_t , für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathbb{E}(e^{sX_t}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{s\sum_{i=1}^{N_t} U_i} \mid N_t\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left(e^{s\sum_{i=1}^n U_i}\right) \mathbb{P}(N_t = n).$$

Nach Satz 2.21 erhalten wir somit aufgrund der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\mathbb{E}(e^{sX_t}) = e_{N_t}(M_U(s)),$$

woraus Behauptung (3.10) aus Satz 3.4 folgt. (3.11) und (3.12) folgen dann unweigerlich durch einfaches Nachrechnen.

Da sich die σ_i und T_i analog definieren lassen, gelten auch alle Eigenschaften für selbige unverändert. Der Beweis der Darstellung (3.13) erfolgt analog zum Beweis von (3.4).

Sei nun $a \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$Y_t = a \left(\sum_{i=1}^{N_t} U_i \right) = \sum_{i=1}^{N_t} aU_i.$$

Da $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung unabhängig und identisch verteilt sind, gilt selbiges auch für $(U'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $U'_i := aU_i$ und wegen $\mathbb{P}(U'_i \leq x) = \mathbb{P}(U_i \leq x/a)$ folgt die Aussage.

Besitze zuletzt F_U eine Dichte f_U , so erhalten wir für alle $t, x \in \mathbb{R}_{>0}$, mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, der Unabhängigkeit aller auftretenden Zufallsvariablen und da nach Voraussetzung nur positive Sprünge auftreten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t \leq x) &= \mathbb{P}(X_t \leq x \mid N_t = 0) \mathbb{P}(N_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_t \leq x \mid N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \mathbb{P}(N_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n U_i \leq x\right) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_{U^{n*}}(y) dy \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Damit wurde (3.14) gezeigt. □

4. Der Satz von Takács

Wir werden in diesem Kapitel folgende bemerkenswerte Formel für $X(t) \sim ZPoi(\lambda, F_U)$ mit $F_U(0) = 0$ zeigen. Diese wurde ausgiebig von Lajos Takács in [4] behandelt. Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt fast sicher

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq t\} \mid X_x\right) = \left(1 - \frac{X_x}{x}\right)_+,$$

wobei $(Y)_+ := \max(0, Y)$ den Positivteil einer Zufallsvariable Y bezeichnet. Wir beschränken uns zunächst auf den Spezialfall $F_U = \delta_1$. Dieser überführt den zusammengesetzten Poisson-Prozess zurück auf den Poisson-Prozess. Für dieses spezielle Beispiel ist es uns möglich obige Formel direkt nachzurechnen.

Satz 4.1 (Takács - Poisson-Prozess). *Sei $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ . Dann erhalten wir fast sicher*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{N_t \leq t\} \mid N_x\right) = \left(1 - \frac{N_x}{x}\right)_+, \quad x \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (4.1)$$

Beweis. Wir werden im folgenden Beweis einige Eigenschaften des Poisson-Prozesses verwenden, welche wir in der Definition 3.3 bzw. Satz 3.4 betrachtet haben. Da der Prozess $N(t)$ nur Werte auf \mathbb{N}_0 annimmt, reicht es zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{N_t \leq t\} \mid N_x = n\right) = \left(1 - \frac{n}{x}\right)_+ \quad (4.2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt ist. Betrachten wir zunächst den Fall $n > x$, so erhalten wir

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{N_t \leq t\} \mid N_x = n\right) \leq \mathbb{P}(N_x \leq x \mid N_x = n) = \mathbb{P}(n \leq x) = 0$$

und somit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{N_t \leq t\} \mid N_x = n\right) = 0 = \left(1 - \frac{n}{x}\right)_+.$$

Damit wurde (4.2) für den Fall $n > x$ gezeigt.

Gelte nun $n < x$, so zeigen wir die Behauptung induktiv bezüglich n . Wir schreiben zunächst vereinfacht

$$\left(1 - \frac{n}{x}\right)_+ = 1 - \frac{n}{x},$$

aufgrund unserer Voraussetzung $n < x$. Zeigen wir nun, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = n\right) = 1 - \frac{n}{x} \quad (4.3)$$

erfüllt ist und beweisen im Anschluss, dass fast sicher gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{N_t \leq t\} \mid N_x = n\right). \quad (4.4)$$

Beginnen für nun mit dem Induktionsanfang, sei also $n = 0 < x$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt aufgrund der Monotonie aller Pfade von $N(t)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{0 < t\}\right) = 1 = 1 - \frac{0}{x},$$

womit (4.3) für $n = 0$ erfüllt ist.

Sei (4.3) nun für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $n < x$ erfüllt und gelte $n + 1 < x$. Dann erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung und Satz 3.4

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\}, N_x = i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = i\right)\mathbb{P}(N_x = i) \\ &= \left(1 - \frac{i}{x}\right) \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

für alle $i = 0, \dots, n$. Zudem gilt für alle $i = 0, \dots, n$ wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse und da N_t nur diskrete Werte annimmt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < (n+1)} \{N_t < t\}, N_{n+1} = i, N_x = n + 1\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in \{1, \dots, i\}} \{N_t < t\}, N_{n+1} = i, N_x = n + 1\right) \\ &= \sum_{k_j < j: j \in \{1, \dots, i\}} \mathbb{P}(N_1 = k_1, \dots, N_n - N_{n-1} = k_n - k_{n-1}, \\ &\quad N_{n+1} - N_n = i - k_n, N_x - N_{n+1} = n + 1 - i) \\ &= \sum_{k_j < j: j \in \{1, \dots, i\}} \mathbb{P}(N_1 = k_1, \dots, N_n - N_{n-1} = k_n - k_{n-1}, \\ &\quad N_{n+1} - N_n = i - k_n) \mathbb{P}(N_x - N_{n+1} = n + 1 - i) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in \{1, \dots, i\}} \{N_t < t\}, N_{n+1} = i\right) \mathbb{P}(N_x - N_{n+1} = n + 1 - i) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < (n+1)} \{N_t < t\}, N_{n+1} = i\right) \mathbb{P}(N_x - N_{n+1} = n + 1 - i). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Somit gilt aufgrund der Monotonie der Pfade sowie (4.5) und (4.6)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = n + 1\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(N_x = n + 1)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\}, N_x = n + 1\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)!}{(\lambda x)^{n+1} e^{-\lambda x}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < (n+1)} \{N_t < t\}, \bigcap_{(n+1) \leq t < x} \{N_t < t\}, N_x = n+1\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(\lambda x)^{n+1} e^{-\lambda x}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < (n+1)} \{N_t < t\}, N_{n+1} < n+1, N_x = n+1\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(\lambda x)^{n+1} e^{-\lambda x}} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < (n+1)} \{N_t < t\}, N_{n+1} = i, N_x = n+1\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(\lambda x)^{n+1} e^{-\lambda x}} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < (n+1)} \{N_t < t\}, N_{n+1} = i\right) \mathbb{P}(N_x - N_{n+1} = n+1-i),
\end{aligned}$$

womit nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = n+1\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(\lambda x)^{n+1} e^{-\lambda x}} \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{(\lambda(n+1))^i}{i!} e^{-\lambda(n+1)} \frac{(\lambda(x - (n+1)))^{n+1-i}}{(n+1-i)!} e^{-\lambda(x-(n+1))} \\
&= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} (n+1)^i (x - (n+1))^{n+1-i} \\
&= \frac{1}{x^{n+1}} [S_1 - S_2]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

erfüllt ist. Dabei definieren wir

$$S_1 := \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (n+1)^i (x - (n+1))^{n+1-i}$$

sowie

$$S_2 := \sum_{i=0}^n \frac{i}{n+1} \binom{n+1}{i} (n+1)^i (x - (n+1))^{n+1-i}.$$

Wir erhalten nun mittels Binomischem Lehrsatz

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (n+1)^i (x - (n+1))^{n+1-i} - (n+1)^{n+1} \\
&= x^{n+1} - (n+1)^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

sowie nach grundlegenden Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} (n+1)^i (x - (n+1))^{n+1-i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (n+1)^{j+1} (x - (n+1))^{n-j} \\
&= (n+1) \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (n+1)^j (x - (n+1))^{n-j} - (n+1)^n \right] \\
&= (n+1)x^n - (n+1)^{n+1}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Somit liefert uns (4.7), (4.8) und (4.9)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = n+1\right) = \frac{1}{x^{n+1}} [S_1 - S_2] = 1 - \frac{n+1}{x},$$

womit die Induktion abgeschlossen und (4.3) gezeigt ist.

Es gilt nun letztendlich für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $n < x$, aufgrund der stetigen Verteilung der Sprünge σ_i , sowie $N_{\sigma_0} = N_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 < t < x} \{N_t < t\} \mid N_x = n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{\sigma_i} < \sigma_i\} \mid N_x = n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{n < \sigma_i\} \mid N_x = n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{n \leq \sigma_i\} \mid N_x = n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n \{N_{\sigma_i} \leq \sigma_i\} \mid N_x = n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{N_t \leq t\} \mid N_x = n\right).
\end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen beiden Wahrscheinlichkeiten ruht also nur auf den Sprungzeitpunkten σ_i , $i = 0, \dots, n$. Dies ist allerdings eine endliche Menge von Punkten mit Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\sigma_i = s) = 0$, womit (4.4) gezeigt ist.

Der Fall $n = x \in \mathbb{N}$ folgt letztendlich wegen

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq n} \{N_t \leq t\} \mid N_n = n\right) = \mathbb{P}(\sigma_n = n) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Wir widmen uns nun dem allgemeinen Resultat für zusammengesetzte Poisson-Prozesse. Um dies zu beweisen, benötigen wir noch folgenden Hilfssatz.

Satz 4.2. *Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton wachsende, rechtsstetige Treppenfunktion, mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(x+t) = \varphi(x) + \varphi(t)$ für ein festes positives x und alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir definieren*

$$\delta(t) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } r - \varphi(r) \geq t - \varphi(t) \text{ für alle } r \geq t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.10}$$

Dann gilt

$$\int_0^x \delta(t) dt = \begin{cases} x - \varphi(x), & \text{wenn } 0 \leq \varphi(x) \leq x \\ 0, & \text{wenn } \varphi(x) > x \end{cases} \tag{4.11}$$

Beweis. Sei zunächst $\varphi(x) > x$, dann erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}(t+x) - \varphi(t+x) &= t+x - \varphi(t) - \varphi(x) \\ &= (t - \varphi(t)) + (x - \varphi(x)) \\ &< t - \varphi(t),\end{aligned}$$

womit, aufgrund von $t+x \geq t$ und (4.10), $\delta(t) = 0$ gilt. Da $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung.

Sei nun $0 \leq \varphi(x) \leq x$, so definieren wir für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\psi(t) := \inf_{r \geq t} [r - \varphi(r)].$$

Aufgrund von $x - \varphi(x) \geq 0$ und $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx - \varphi(nx) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x - \varphi(x) = 0 \\ +\infty, & \text{wenn } x - \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

wobei n die natürlichen Zahlen durchläuft. Da die Funktion $t - \varphi(t)$ zudem im Intervall $[0, x]$ lediglich endlich viele Sprungstellen besitzt, ist ψ wohldefiniert und der Grenzwert wird aufgrund der Rechtsstetigkeit von φ tatsächlich angenommen. Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert also ein $r^* \geq t$ mit $\psi(t) = r^* - \varphi(r^*)$. Zudem gilt dann für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\psi(t) = \inf_{r \geq t} [r - \varphi(r)] \leq t - \varphi(t),$$

sowie die Relation

$$\begin{aligned}\psi(t) = t - \varphi(t) &\iff \inf_{r \geq t} [r - \varphi(r)] = t - \varphi(t) \\ &\iff r - \varphi(r) \geq t - \varphi(t), \quad r \geq t \\ &\iff \delta(t) = 1\end{aligned}\tag{4.12}$$

und letztendlich

$$\begin{aligned}\psi(t+x) &= \inf_{r \geq t+x} [r - \varphi(r)] = \inf_{r' \geq t} [r' + x - \varphi(r' + x)] \\ &= \inf_{r' \geq t} [r' - \varphi(r')] + x - \varphi(x) = \psi(t) + x - \varphi(x).\end{aligned}$$

Insbesondere also für $t = 0$,

$$\psi(x) = \psi(0) + x - \varphi(x).\tag{4.13}$$

Seien nun $t, t' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $t \leq t'$, dann erhalten wir

$$\psi(t) = \inf_{r \geq t} [r - \varphi(r)] \leq \inf_{r \geq t'} [r - \varphi(r)] = \psi(t')$$

wegen $\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : r \geq t\} \supseteq \{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : r \geq t'\}$. Sei nun das kleinste $r^* \geq t$ so gewählt, dass $\psi(t) = r^* - \varphi(r^*)$ erfüllt ist. Aufgrund der Monotonie von φ , ist für $r^* \geq t'$

$$\psi(t') = \psi(t)$$

erfüllt und somit

$$0 = \psi(t') - \psi(t) \leq t' - t.$$

Im Falle $r^* \in [t, t')$ erhalten wir $-r^* \leq -t$, sowie $\varphi(r^*) \leq \varphi(t')$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \psi(t') - \psi(t) &= \psi(t') - r^* + \varphi(r^*) \\ &\leq t' - \varphi(t') - r^* + \varphi(r^*) \\ &\leq t' - t + (\varphi(r^*) - \varphi(t')) \\ &\leq t' - t. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$0 \leq \psi(t') - \psi(t) \leq t' - t$$

für alle $0 \leq t \leq t'$. Also ist ψ monoton und Lipschitz-stetig und somit insbesondere absolut stetig. Damit ist ψ f.ü. differenzierbar und es gilt

$$0 \leq \psi'(t) \leq 1 \tag{4.14}$$

sowie mittels (4.13), nach dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung für Lebesgue-Integrale

$$\int_0^x \psi'(t) dt = \psi(x) - \psi(0) = x - \varphi(x). \tag{4.15}$$

Wir zeigen nun als nächstes, dass für fast alle $t \geq 0$ die Bedingung

$$\psi'(t) \leq \delta(t)$$

erfüllt ist.

Falls $\psi'(t) = 0$ gilt, so folgt die Behauptung direkt aus (4.10).

Sei also $\psi'(t) > 0$, dann erhalten wir $\psi(t + \epsilon) > \psi(t)$ innerhalb einer hinreichend kleinen ϵ -Umgebung um t mit $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Deshalb ist

$$\psi(t) = \inf_{t \leq r < t + \epsilon} [r - \varphi(r)] = t + \delta_\epsilon - \varphi(t + \delta_\epsilon)$$

für ein $0 \leq \delta_\epsilon < \epsilon$ gültig. Damit erhalten wir insbesondere für $\epsilon \rightarrow 0$

$$\psi(t) = t - \varphi(t + 0).$$

Da φ nach Voraussetzung rechtsstetig ist, folgt $\varphi(t + 0) = \varphi(t)$ für fast alle $t \geq 0$ und somit $\psi(t) = t - \varphi(t)$. Damit folgt schließlich mittels (4.12), dass $\delta(t) = 1$ erfüllt ist und wegen (4.14) erhalten wir die gesuchte Bedingung. Nun beweisen wir, dass ebenfalls

$$\psi'(t) \geq \delta(t)$$

für fast alle $t \geq 0$ gilt.

Falls $\delta(t) = 0$ gilt, so ist obige Bedingung nach (4.14) erfüllt.

Wir definieren uns nun die Menge $D := \{r \in [0, \infty) : \delta(r) = 1\}$. Sei t ein Häufungspunkt in D , d.h. $t \in D$ mit $t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in D$ und $t_n \neq t$ gelten. Dann erhalten wir nach (4.12) $\psi(t) = t - \varphi(t)$ sowie $\psi(t_n) = t_n - \varphi(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Existiere nun die Ableitung $\psi'(t)$, dann gilt

$$\psi'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(t) - \psi(t_n)}{t - t_n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_n)}{t - t_n} = 1 - \varphi'(t).$$

Also existiert die Ableitung $\varphi'(t)$ und wir erhalten

$$\varphi'(t) = 0,$$

da φ eine Treppenfunktion ist. Weil die Menge der isolierten Punkte in D aufgrund der Rechtsstetigkeit von φ (und somit auch von δ) eine abzählbare bzw. leere Menge bilden, ist die Behauptung gezeigt. Wir erhalten nun für fast alle $t \geq 0$

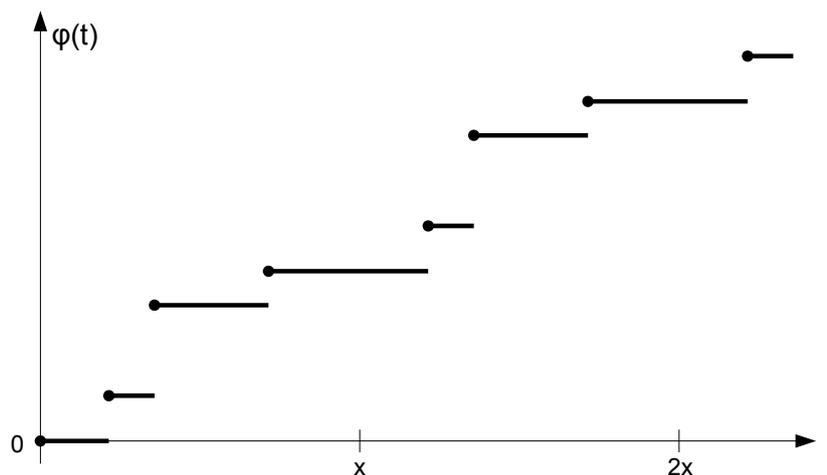
$$\psi'(t) = \delta(t). \tag{4.16}$$

Zuletzt erhalten wir mittels (4.15) und (4.16)

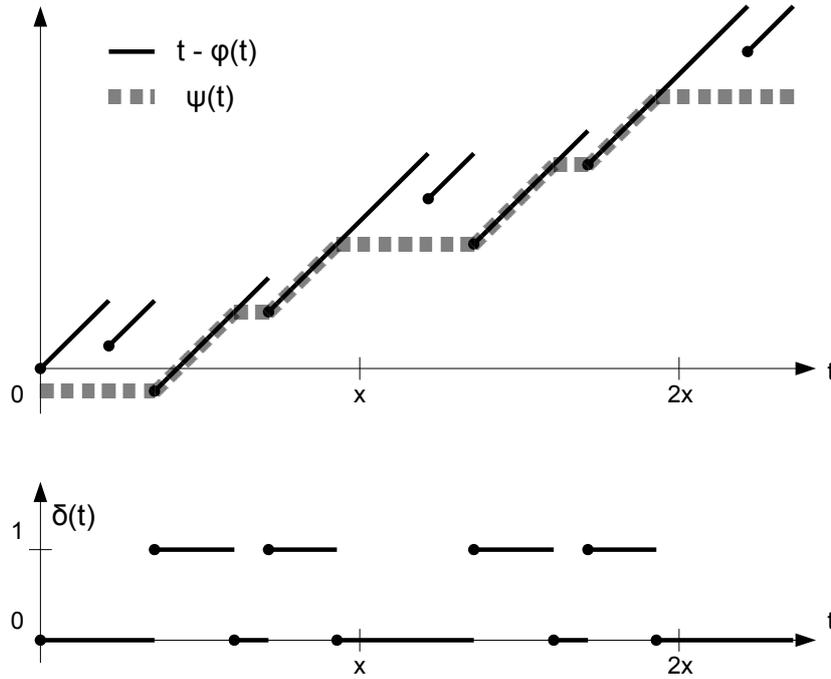
$$\int_0^x \delta(t) dt = x - \varphi(x),$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Zur Veranschaulichung zeigen Grafiken 4.1. und 4.2. (siehe unten) die Zusammenhänge zwischen den Hilfsfunktionen des obigen Beweises anhand eines Beispiels.



Grafik 4.1. - Beispiel Treppenfunktion



Grafik 4.2. - Beispiel Takács Hilfsfunktionen zu Grafik 4.1.

Wir sind nun in der Lage unser Hauptresultat für zusammengesetzte Poisson-Prozesse zu zeigen.

Satz 4.3 (Takács - Zusammengesetzter Poisson-Prozess). *Sei $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Intensität λ und Schadensverteilung F_U . Sei zudem $F_U(0) = 0$ erfüllt, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ fast sicher*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq t\} \mid X_x\right) = \left(1 - \frac{X_x}{x}\right)_+ . \quad (4.17)$$

Beweis. Wir definieren zunächst

$$\varphi(t) := X_t, \quad 0 \leq t \leq x$$

und setzen φ mittels

$$\varphi(x+t) := \varphi(x) + \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_{>0}$$

auf (x, ∞) fort. Damit gilt insbesondere für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\varphi(t) = \left[\frac{t}{x}\right] \varphi(x) + \varphi\left(t - \left[\frac{t}{x}\right]x\right) = \left[\frac{t}{x}\right] X_x + X_{t - \left[\frac{t}{x}\right]x}$$

wobei $[y]$ den ganzen Teil von y bezeichnet. Also ist $\varphi(t)$ als Summe von Zufallsvariablen wieder eine Zufallsvariable. Wir definieren nun zudem analog zu Satz 4.2

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \varphi(r) - \varphi(t) \leq r - t \text{ für alle } r \geq t \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da es genügt die Bedingungen $\varphi(r) - \varphi(t) \leq r - t$ für endlich viele Sprünge im Intervall $[t, t+x]$ zu testen, ist $\delta(t)$ ebenfalls eine Zufallsvariable. Nach Satz 3.6 besitzt $X(t)$ stationäre, unabhängige Zuwächse und wir erhalten somit

$$X_r - X_t \sim X_{r-t}$$

für alle $t, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \geq r \geq t \geq 0$. Insbesondere gilt also

$$\varphi(r) - \varphi(t) \sim \varphi(r-t)$$

für alle $t, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \geq r \geq t \geq 0$. Aufgrund der Periodizität von φ gilt dies auch allgemein für alle $r \geq t \geq 0$. Letztendlich sichert uns die Bedingung $F_U(0) = 0$, dass alle Pfade von $X(t)$ monoton wachsend sind. Analog zum Beweis von Satz 4.2 lässt sich nun zeigen, dass $\delta(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, falls $\varphi(x) > x$ erfüllt ist. Damit folgt insbesondere

$$0 = \mathbb{P}(\delta(t) = 1 \mid \varphi(x) > x) = \mathbb{P}(\delta(0) = 1 \mid \varphi(x) > x). \quad (4.18)$$

Im Falle $\varphi(x) \leq x$ erhalten wir für alle $s \in [0, x], t \geq 0$

$$\begin{aligned} x + t + s - \varphi(x + t + s) &= x + t + s - \varphi(x) - \varphi(t + s) \\ &\geq t + s - \varphi(t + s) \end{aligned}$$

und damit induktiv das gleiche für alle $s \geq 0$. Wir erhalten also insbesondere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\delta(t) = 1 \mid \varphi(x) \leq x) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{r \geq t} \{\varphi(r) - \varphi(t) \leq r - t\} \mid \varphi(x) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{x+t \geq r \geq t} \{\varphi(r) - \varphi(t) \leq r - t\} \mid \varphi(x) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{x+t \geq r \geq t} \{\varphi(r-t) \leq r-t\} \mid \varphi(x) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{x \geq r' \geq 0} \{\varphi(r') \leq r'\} \mid \varphi(x) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}(\delta(0) = 1 \mid \varphi(x) \leq x), \end{aligned} \quad (4.19)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und somit wegen (4.18) und (4.19)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\delta(t) = 1) &= \mathbb{P}(\delta(t) = 1 \mid \varphi(x) > x) + \mathbb{P}(\delta(t) = 1 \mid \varphi(x) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\delta(0) = 1 \mid \varphi(x) > x) + \mathbb{P}(\delta(0) = 1 \mid \varphi(x) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\delta(0) = 1). \end{aligned}$$

Es gilt also für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\delta(t) \sim \delta(0). \quad (4.20)$$

Die Verteilung von $\delta(t)$ ist also nicht von t abhängig. Da alle Pfade von $X(t)$ nach Satz 3.6 rechtsstetig mit $X_0 = 0$ und wegen $F(0) = 0$ zudem monoton wachsend sind, gilt insbesondere nach Satz 4.2

$$\int_0^x \delta_\omega(t) dt = \begin{cases} x - \varphi_\omega(x), & \text{wenn } 0 \leq \varphi_\omega(x) \leq x \\ 0, & \text{wenn } \varphi_\omega(x) > x. \end{cases} \quad (4.21)$$

Wir erhalten somit fast sicher mittels (4.20), (4.21) sowie dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq t\} \mid X_x\right)(\omega) &= \mathbb{E}(\delta(0) \mid X_x)(\omega) = \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{E}(\delta(t) \mid X_x)(\omega) dt \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{x} \int_0^x \delta_\omega(t) dt \mid X_x(\omega)\right) \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{\varphi_\omega(x)}{x}\right) \mid X_x(\omega)\right), & \text{wenn } 0 \leq \varphi_\omega(x) \leq x \\ \mathbb{E}(0 \mid X_x(\omega)), & \text{wenn } \varphi_\omega(x) > x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - \frac{\mathbb{E}(X_x(\omega) \mid X_x(\omega))}{x}, & \text{wenn } 0 \leq X_x(\omega) \leq x \\ 0, & \text{wenn } X_x(\omega) > x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - \frac{X_x(\omega)}{x}, & \text{wenn } 0 \leq X_x(\omega) \leq x \\ 0, & \text{wenn } X_x(\omega) > x \end{cases} \\
&= \left(1 - \frac{X_x(\omega)}{x}\right)_+
\end{aligned}$$

womit fast sicher

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq t\} \mid X_x\right) = \left(1 - \frac{X_x}{x}\right)_+$$

gilt und damit die Behauptung gezeigt wurde. \square

Anmerkung: Wir haben im Beweis obigen Satzes lediglich zwei Eigenschaften des zusammengesetzten Poisson-Prozesses benutzt. Der Satz gilt also allgemein für alle stochastischen Prozesse mit càdlàg-Pfaden, für welche die Verteilung der Zufallsvariablen $X_{v+t} - X_v$ nicht von v abhängig ist. Insbesondere also auch dem Poisson-Prozess, womit die Behauptung auch alternativ für diesen gezeigt wurde.

5. Das Ruinmodell

Befassen wir uns nun mit unserem Modell der Ruintheorie und definieren dazu entscheidende Größen. Weiterhin werden wir in diesem Kapitel noch ein Beispiel für unseren zusammengesetzten Poisson-Prozess näher betrachten.

Ab sofort werden wir $X(t)$ aus Definition 3.5 als *Schadensprozess* über den Zeitraum $[0, t]$ bezeichnen. Dabei stellen die Zufallsvariablen $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die *Höhe der Einzelschäden* dar und unser Poissonprozess $N(t)$ bestimmt die *Anzahl der Einzelschäden*. Wir haben also einen Gesamtschadensprozess mit zufälliger Anzahl und Höhe von Einzelschäden. Unsere Forderung $F_U(0) = 0$, aus den Sätzen 3.6 sowie 4.3, ist somit gleichbedeutend mit der Forderung, lediglich positive Einzelschäden zulassen zu wollen. Dies ist aus Sicht des Versicherers eine sinnvolle Annahme. Wir werden daher ab sofort, falls nicht explizit anders erwähnt, stets $F_U(0) = 0$ voraussetzen.

Um die Schäden zu kompensieren, ist es notwendig, dass der Versicherer eine konstante Zuzahlung erhält. Wir bezeichnen deshalb mit $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die *stetige Prämie* des Versicherers. Diese wird konstant ausgezahlt, das heißt bis zum Zeitpunkt t erhält unser Versicherer βt Geldeinheiten. Wir bemerken aufgrund der positiven Schäden, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(U_i > \beta T_i) = \int_0^\infty \bar{F}_U(\beta t) e^{-\lambda t} dt > 0 \quad (5.1)$$

unabhängig von der Wahl von β gilt, d.h. der Versicherer betreibt keine „Piraterie“. Zudem steht ihm noch ein Startkapital $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zur Verfügung, welches wir als *freie Reserve* bezeichnen möchten. Zuletzt definieren wir noch mit

$$R(t) := u + \beta t - X(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i, \quad (5.2)$$

den *Risikoreserve Prozess* sowie mit

$$S(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} U_i - \beta t = u - R(t) \quad (5.3)$$

den *Schadensüberschuss Prozess*. Beides sind offensichtlich stochastische Prozesse, wobei die Zufallsvariablen R_t bzw. S_t stetig verteilt sind.

Wir sind nun in der Lage unsere Ruinwahrscheinlichkeiten zu definieren und einige Bemerkungen über selbige anzustellen.

Definition 5.1. Sei $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U , sowie $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Prämienrate und $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die freie Reserve. Dann definieren wir für alle $x \in \mathbb{R}_{> 0}$

$$\bar{\psi}(u, x) := \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{R_t \geq 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{S_t \leq u\}\right) \quad (5.4)$$

die *Überlebenswahrscheinlichkeit in endlicher Zeit* bzw. mit

$$\psi(u, x) := 1 - \bar{\psi}(u, x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{0 \leq t \leq x} \{R_t \leq 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{0 \leq t \leq x} \{S_t \geq u\}\right) \quad (5.5)$$

die *Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit*. Zudem bezeichnen wir noch

$$\bar{\psi}(u) := \mathbb{P}\left(\bigcap_{t \geq 0} \{R_t \geq 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{t \geq 0} \{S_t \leq u\}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u, x) \quad (5.6)$$

als *Überlebenswahrscheinlichkeit* und

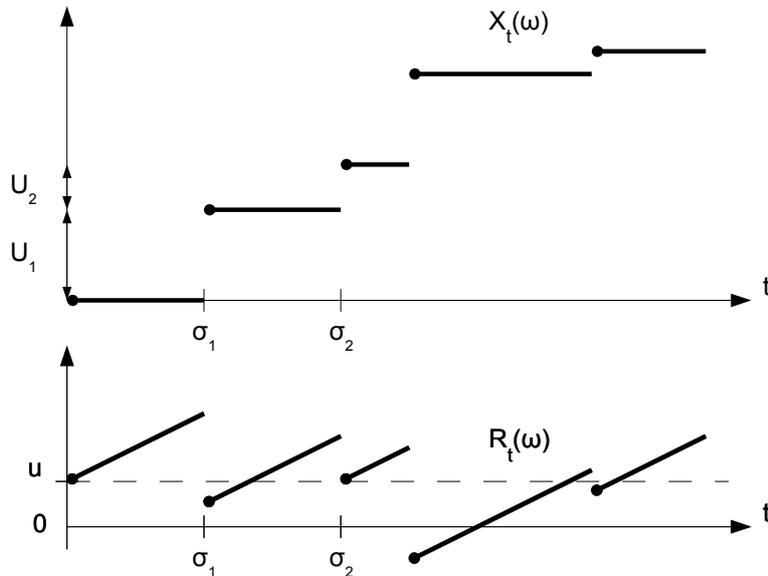
$$\psi(u) := \mathbb{P}\left(\bigcup_{t \geq 0} \{R_t \leq 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t \geq 0} \{S_t \geq u\}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(u, x) \quad (5.7)$$

als *Ruinwahrscheinlichkeit*. Zudem definieren wir für $x = 0$

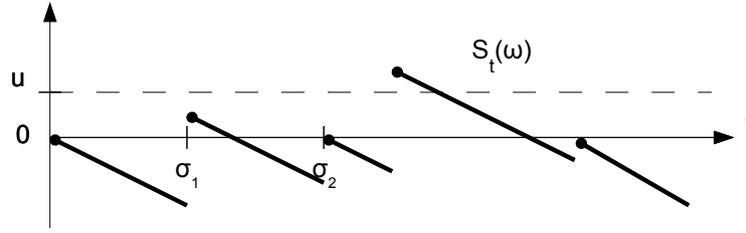
$$\bar{\psi}(u, 0) := 1 \text{ sowie } \psi(u, 0) := 0. \quad (5.8)$$

Die Betrachtung des Grenzfalles $x = 0$ ist wegen (5.8) also meist überflüssig. Deshalb werden wir, falls nicht anders erwähnt im Folgenden stets $x \in \mathbb{R}_{>0}$ annehmen.

Wir erkennen, dass in unserem Modell Ruin genau dann eintritt, wenn die finanziellen Mittel eines Versicherers zu einem Zeitpunkt t kleiner oder gleich 0 betragen. Es ist allerdings einfach zu erkennen, dass sich diese Grenze durch Anpassung der freien Reserve verschieben lässt. Möchte ein Versicherer technischen Ruin bei einer Geldreserve kleiner oder gleich $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq u$ für sich definieren, so muss er in allen folgenden Berechnungen lediglich die freie Reserve u durch $u - s$ ersetzen.



Grafik 5.1. - Beispiel Risikoreserveprozess



Grafik 5.2. - Schadensüberschussprozess zu Grafik 5.1.

Grafiken 5.1. und 5.2. verdeutlichen nun optisch die Zusammenhänge der einzelnen Prozesse anhand eines Beispielpfades. Im obigen Beispiel, tritt Ruin genau zum Zeitpunkt σ_3 ein und der Anstieg der Geraden entspricht der konstanten Prämienrate β . Wir betrachten nun einige Grundlagen der Ruinwahrscheinlichkeiten, bevor wir uns der Prämie noch etwas genauer widmen.

Satz 5.2. Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sowie $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U . Dann ist $\bar{\psi}(\cdot, x)$ eine monoton wachsende Funktion sowie $\bar{\psi}(u, \cdot)$ eine monoton fallende Funktion. Zudem ist $\bar{\psi}(u, x)$ f.ü. partiell differenzierbar bezüglich u .

Beweis. Wir zeigen zunächst die Monotonie bezüglich u . Seien dazu $u_1, u_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $u_1 \leq u_2$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Da für alle $t \in [0, x]$ die Relation

$$\{X_t \leq u_1 + \beta t\} \subseteq \{X_t \leq u_2 + \beta t\}$$

erfüllt ist, folgt

$$\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u_1 + \beta t\} \subseteq \bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u_2 + \beta t\}.$$

Daraus resultierend erhalten wir

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u_1 + \beta t\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u_2 + \beta t\}\right)$$

und nach Definition 5.1 ist die Funktion $\bar{\psi}(\cdot, x)$ somit monoton wachsend. Die Monotonie bezüglich x folgt dann wegen

$$\bigcap_{0 \leq t \leq x_1} \{X_t \leq u + \beta t\} \supseteq \bigcap_{0 \leq t \leq x_2} \{X_t \leq u + \beta t\}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_1 \leq x_2$ und $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die letzte Behauptung folgt dann aus der Monotonie von $\bar{\psi}(u, x)$ bezüglich u und wurde sowohl für stetige, als auch unstetige Funktionen von Lebesgue bzw. Young u.a. in [5] bzw. [6] gezeigt. Wir werden später feststellen, dass $\bar{\psi}(u, x)$ stetig bezüglich beider Variablen ist. \square

Anmerkung: Wir leiten somit recht schnell aus Definition 5.1 und Satz 5.2 ab, dass die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u, x)$ monoton fallend bezüglich u und monoton wachsend bezüglich x ist.

Aufgrund der Monotonie wissen wir nun, dass für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $x \in \mathbb{R}_{> 0}$ die Gleichung

$$\psi(u, x) \leq \psi(u) \quad (5.9)$$

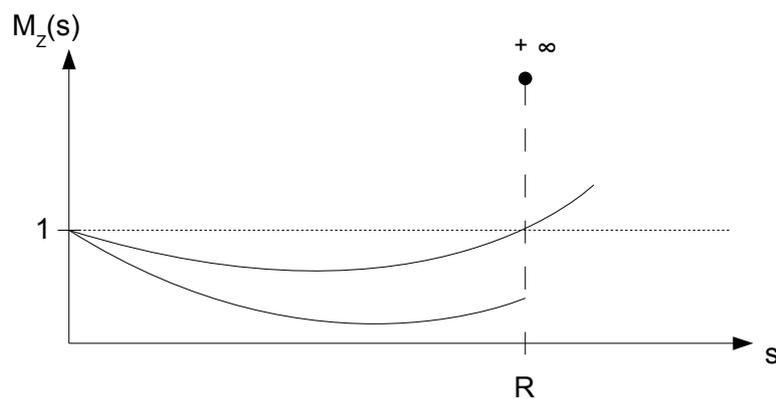
erfüllt ist. Es ist uns also möglich die endliche Ruinwahrscheinlichkeit durch die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit abzuschätzen. Wir werden uns daher einer wichtigen Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ widmen, welche uns dank (5.9) ebenfalls als Abschätzung für $\psi(u, x)$ dient. Wir führen dazu den Begriff des Anpassungskoeffizienten einer Zufallsvariable ein.

Definition 5.3. Sei Z eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}Z < 0$, so bezeichnen wir die positive Lösung $R \in \mathbb{R}_{> 0}$ der Gleichung

$$M_Z(s) = 1 \quad (5.10)$$

als *Anpassungskoeffizienten* von Z , falls sie existiert.

Wir wollen nun noch etwas näher betrachten, wann genau der Anpassungskoeffizient existiert. Sei dazu $s_Z^+ = \sup \{s \geq 0 : M_Z(s) < \infty\}$, wie in Kapitel 2, der obere Existenzradius von $M_Z(s)$. Da nach Voraussetzung $\mathbb{E}Z$ existiert und negativ ist, fällt wegen $\mathbb{E}Z = M_Z'(0)$ die momenterzeugende Funktion um $M_Z(0) = 1$. Wegen $M_Z''(s) = \mathbb{E}Z^2 e^{sZ} \geq 0$ für alle $s \in [0, s_Z^+)$ ist die momenterzeugende Funktion zudem konvex. Die momenterzeugende startet also im Punkt $(0, 1)$, taucht dann unter die Gerade $s = 1$ und steigt schließlich unbegrenzt. Es kommt nun in einigen Fällen vor, dass die momenterzeugende Funktion einen Sprung auf den Wert $+\infty$ vollführt. Unser Anpassungskoeffizient existiert dann nur, falls die $M_Z(s)$ bis zu diesem Punkt die Gerade $r = 1$ überschritten hat. Es lässt sich also recht einfach zeigen, dass R genau dann existiert, wenn ein $1 < c \leq \infty$ existiert mit $\lim_{s \rightarrow s_Z^+} M_Z(s) = c$.



Grafik 5.3. - möglicher Verlauf momenterz. Funktion

Haben wir also nun unseren Anpassungskoeffizienten bestimmt, so gilt die folgende Cramér-Lundberg-Ungleichung für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$.

Satz 5.4. *Sei $X(t)$ ein Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U , sowie $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Existiere zudem der Anpassungskoeffizient R von $U_1 - \beta T_1$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{> 0}$*

$$\psi(u, x) \leq \psi(u) \leq e^{-uR}, \quad u \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (5.11)$$

Beweis. Die erste Ungleichung hatten wir in (5.9) gezeigt.

Es reicht also, die zweite Ungleichung zu beweisen. Sei dazu $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t \geq 0} \{S_t \geq u\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_{T_n} \geq u\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n U_i - \beta T_i \geq u \right\}\right).$$

Definieren wir also nun für alle $i \in \mathbb{N}$, die Zufallsvariable

$$Z_i := U_i - \beta T_i$$

als *effektiven i -ten Schaden*, so überführen wir unsere stetige Ruinwahrscheinlichkeit auf eine diskrete Ruinwahrscheinlichkeit. Somit folgt die Behauptung dann direkt aus der Gleichverteilung der U_i sowie der T_i und der Cramér-Lundberg-Ungleichung für diskrete Ruinwahrscheinlichkeiten. Letzteres lässt sich z.B. in [7] nachlesen. \square

Anmerkung: Da nach Satz 3.6 T_1 exponentialverteilt mit Parameter λ ist und zudem unabhängig von dem Schaden U_1 , erhalten wir zusätzlich nach Satz 2.19

$$M_Z(s) = M_{U_1 - \beta T_1}(s) = \mathbb{E}e^{s(U_1 - \beta T_1)} = M_U(s)M_T(-\beta s) = M_U(s)\frac{\lambda}{\lambda + \beta s}, \quad s \in (s_Z^-, s_Z^+).$$

Somit ist unser Anpassungskoeffizient R aus Satz 5.4 die positive Lösung der Gleichung

$$\lambda + \beta s = \lambda M_U(s), \quad (5.12)$$

falls sie existiert.

Existiert also der Anpassungskoeffizient, so ist die Versicherung „risikolos“ in dem Sinne, dass durch geeignete Wahl der freien Reserve u , die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ (und somit auch $\psi(u, x)$) beliebig minimiert werden können. Ist also zum Beispiel $\epsilon > 0$ eine strategisch zulässige Ruinwahrscheinlichkeit, so wählen wir

$$u = -\frac{1}{R} \ln \epsilon.$$

In den für die Praxis relevanten Modellen existiert der Anpassungskoeffizient jedoch häufig nicht, da meistens eine Großschadenverteilung vorliegt, so dass $M_U(s) = \infty$ für alle $s \in \mathbb{R}_{> 0}$ gilt. Aber auch eine schlechte Wahl der Prämienrate kann zu Risiken für die Versicherer führen. Deswegen wollen wir als nächstes die Auswirkungen der stetigen Prämienrate β auf die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit betrachten.

Satz 5.5. Sei $X(t)$ ein Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U , sowie $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Falls $\lambda \mathbb{E}U_1 \geq \beta$ erfüllt ist, so folgt für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\psi(u) = 1. \quad (5.13)$$

Gilt hingegen $\lambda \mathbb{E}U_1 < \beta$, so erhalten wir

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0. \quad (5.14)$$

Beweis. Betrachten wir die Bedingung für (5.13), so können wir diese nach Sätzen 3.6 und 2.19 umformulieren zu

$$\mathbb{E}(U_1 - \beta T_1) \geq 0.$$

Analog zum Beweis von Satz 5.4 können wir erneut $Z_i := U_i - \beta T_i$ definieren und erkennen, dass unsere Voraussetzung einen nichtnegativen Erwartungswert für diese liefert. Wir überführen somit erneut unser stetiges Modell auf ein diskretes und übernehmen die Resultate. Diese können für den diskreten Fall erneut in [7] nachgelesen werden und beruhen hauptsächlich auf dem starken Gesetz der großen Zahlen und der Random-Walk-Theorie. \square

Intuitiv sind die Resultate des obigen Satzes für den Fall positiver effektiver Schäden klar. Ein Versicherer wird deshalb immer $\beta > \lambda \mathbb{E}U_1 > 0$ anstreben, was wir somit im Folgenden voraussetzen werden. Es gibt nun viele Prämienprinzipien, wie etwa das Erwartungswert-, Varianz-, Nullnutzen- oder Exponentialprinzip, welche diese Bedingung erfüllen. Auf die genaue Untersuchung derer Eigenschaften wird an dieser Stelle verzichtet und kann z.B. in [8] nachgelesen werden.

Wir befassen uns nun abschließend für dieses Kapitel mit einem Beispiel, welches uns für den Rest der Arbeit begleiten wird. Wir werden den Fall der exponentialverteilten Einzelschäden betrachten. Dazu definieren wir zunächst folgende Hilfsfunktion.

Definition 5.6. Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir die Funktion $J : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$J(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!n!} = I_0(2\sqrt{x}). \quad (5.15)$$

Dabei bezeichne I_θ die modifizierte Bessel-Funktion.

Aufgrund des direkten Zusammenhangs zur modifizierten Bessel-Funktion ist unsere Hilfsfunktion J wohldefiniert und konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei insbesondere $J(0) = 1$ erfüllt ist. Dies ist ebenfalls ersichtlich mittels Quotientenkriterium aufgrund von

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{(r+1)^2} \right| = 0 < 1.$$

Wir werden nun noch einige Formeln für unsere Hilfsfunktion vorstellen, welche sich im weiteren Verlauf als nützlich erweisen werden.

Satz 5.7. Sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und J definiert gemäß (5.15). Dann ist J beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$J'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} \text{ sowie } J''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!(n-2)!}. \quad (5.16)$$

Somit erfüllt J die Differentialgleichung

$$xJ''(x) + J'(x) - J(x) = 0 \quad (5.17)$$

und folglich ist J Riemann-integrierbar mit Stammfunktion

$$\int_0^x J(y) \, dy = xJ'(x). \quad (5.18)$$

Zudem gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$

$$\int_0^c e^{-by} J'(ay) \, dy = \frac{1}{a} e^{-bc} J(ac) - \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \int_0^c e^{-by} J(ay) \, dy, \quad (5.19)$$

bzw. mit $b \neq 0$

$$\int_0^c ye^{-by} J'(ay) \, dy = -\frac{c}{b} e^{-bc} J'(ac) + \frac{1}{b} \int_0^c e^{-by} J(ay) \, dy. \quad (5.20)$$

Zuletzt existiert für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte von $J(zx)$ und es gilt

$$\hat{L}_{J(zx)}(s) = s^{-1} e^{z/s}, \quad (5.21)$$

insbesondere erhalten wir die Laplace-Transformierte von $J(x)$

$$\hat{L}_{J(x)}(s) = s^{-1} e^{1/s}. \quad (5.22)$$

Beweis. Wir hatten bereits gezeigt, dass der Konvergenzradius von J unendlich ist. Somit ist J beliebig oft auf \mathbb{R} differenzierbar und (5.16) folgt direkt durch Differentiation unter der Summe. Wir erhalten somit insbesondere

$$\begin{aligned} xJ''(x) + J'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}(n-1)}{n!(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} + 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}n}{n!(n-1)!} + 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n-1)!} = \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{x^{n'}}{(n')!(n')!} = J(x), \end{aligned}$$

womit unsere Differentialgleichung (5.17) gezeigt wurde.

Leiten wir die Stammfunktion von J nach x ab, so folgt die Behauptung (5.18) direkt

aus der eben gezeigten Differentialgleichung.

Wir zeigen nun (5.19) mittels partieller Integration. Sei dazu $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gilt mit $J(0) = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^c e^{-by} J'(ay) dy &= \left[\frac{1}{a} e^{-by} J(ay) \right]_0^c + \frac{b}{a} \int_0^c e^{-by} J(ay) dy \\ &= \frac{1}{a} e^{-bc} J(ac) - \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \int_0^c e^{-by} J(ay) dy. \end{aligned}$$

Gelte nun $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, so erhalten wir aufgrund von (5.17) erneut mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^c y e^{-by} J'(ay) dy &= \left[-\frac{1}{b} e^{-by} y J'(ay) \right]_0^c + \frac{1}{b} \int_0^c e^{-by} (J'(ay) + ay J''(ay)) dy \\ &= -\frac{c}{b} e^{-bc} J'(ac) + \frac{1}{b} \int_0^c e^{-by} J(ay) dy, \end{aligned}$$

womit ebenfalls (5.20) gezeigt ist.

Sei zuletzt $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{R}$, so gilt mittels dem Satz von Fubini sowie grundlegenden Eigenschaften der Gammafunktion

$$\begin{aligned} \hat{L}_{J(zx)}(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} J(zy) dy = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!n!} \int_0^\infty e^{-sy} y^n dy = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!n!} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!n!} \frac{n!}{s^{n+1}} = s^{-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(z/s)^n}{n!} = s^{-1} e^{z/s}. \end{aligned}$$

Somit wurde (5.21) gezeigt und (5.22) folgt unweigerlich für $z = 1$. □

Betrachten wir abschließend unser Beispiel der exponentialverteilten Schadenshöhen. Wir wissen bereits aus der Definition 2.20 der Erlang-Verteilung, dass die Summe von unabhängigen, identisch exponentialverteilten Zufallsvariablen genau der Erlang-Verteilung entspricht. Dessen Dichte ist uns dank Satz 2.21 wohlbekannt. Wir werden also nun in der Lage sein, eine geschlossene Form für die Verteilung unserer X_t , mithilfe der Hilfsfunktion J , anzugeben.

Satz 5.8. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und $\text{Exp}(\mu)$. Dann existiert für alle $s \in (-\infty, \mu)$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die momenterzeugende Funktion*

$$M_{X_t}(s) = e^{\frac{\lambda t s}{\mu - s}} \quad (5.23)$$

von X_t . Somit existieren alle Momente von X_t , insbesondere

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\lambda t}{\mu} \text{ sowie } \text{Var}(X_t) = \frac{2\lambda t}{\mu}. \quad (5.24)$$

Zudem existiert der Anpassungskoeffizient

$$R = \mu - \lambda/\beta > 0. \quad (5.25)$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.6 erhalten wir für alle $t, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\tilde{f}_{X_t}(y) = \lambda t \mu e^{-(\lambda t + \mu y)} J'(\lambda t \mu y), \quad (5.26)$$

womit für die Verteilungsfunktion

$$F_{X_t}(x) = e^{-(\lambda t + \mu x)} J(\lambda t \mu x) + e^{-\lambda t} \int_0^{\mu x} e^{-y} J(\lambda t y) dy \quad (5.27)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gültig ist.

Beweis. Die Aussagen (5.23) und (5.24) folgen unweigerlich aus den Sätzen 2.19 sowie 3.6 und der Beziehung $\mathbb{E}(U^2) = \text{Var}(U) + (\mathbb{E}(U))^2$.

Aufgrund von

$$\lim_{s \rightarrow \mu} M_{U_{1-\beta} T_1}(s) = \lim_{s \rightarrow \mu} \frac{\mu}{\mu - s} \frac{\lambda}{\lambda + \beta s} = +\infty$$

existiert der Anpassungskoeffizient R und nach (5.12) ist er die Lösung der Gleichung

$$\lambda + \beta s = \frac{\lambda \mu}{\mu - s}, \quad (5.28)$$

welche durch (5.25) gegeben ist. Dass dieser wirklich größer als 0 ist, folgt aus unserer Voraussetzung $\beta > \lambda \mathbb{E}U_1$, welche eine Folge von Satz 5.5 darstellte.

Widmen wir uns nun (5.26). Sei $n \in \mathbb{N}$, dann entspricht nach Definition 2.20 die Dichte der n -fachen Faltung $f_{U^{n*}}$ der Dichte einer Erlang-Verteilung. Wir erhalten also nach Satz 3.6 mittels (2.60), sowie (5.16), für alle $t, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{X_t}(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_{U^{n*}}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\mu y} \\ &= \lambda t \mu e^{-(\lambda t + \mu y)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t \mu y)^{n-1}}{n!(n-1)!} = \lambda t \mu e^{-(\lambda t + \mu y)} J'(\lambda t \mu y). \end{aligned}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so gilt mit (3.14), (5.19) und (5.26)

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= e^{-\lambda t} + \int_0^x \tilde{f}_{X_t}(y) dy = e^{-\lambda t} \left[1 + \lambda t \mu \int_0^x e^{-\mu y} J'(\lambda t \mu y) dy \right] \\ &= e^{-\lambda t} \left[e^{-\mu x} J(\lambda t \mu x) + \mu \int_0^x e^{-\mu y} J(\lambda t \mu y) dy \right] \\ &= e^{-(\lambda t + \mu x)} J(\lambda t \mu x) + e^{-\lambda t} \int_0^{\mu x} e^{-y} J(\lambda t y) dy, \end{aligned}$$

womit (5.27) gezeigt wurde. □

Für dieses Beispiel erhalten wir also eine erste Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit mit der Cramér-Lundberg-Ungleichung

$$\psi(u, x) \leq \psi(u) \leq e^{-u(\mu-\lambda/\beta)}. \quad (5.29)$$

Somit sind alle Grundlagen gelegt und wir widmen uns im nächsten Kapitel weiteren Berechnungsmöglichkeiten für unsere Ruinwahrscheinlichkeiten.

6. Integralgleichungen der Ruintheorie

Wir wollen uns ab diesem Kapitel mit weiteren Formeln für unsere Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit befassen und diese herleiten. Die wichtigste darunter ist die Formel von Seal, welche uns einen Zusammenhang zwischen der Ruinwahrscheinlichkeit ohne Startkapital und der Ruinwahrscheinlichkeit mit beliebig großem Startkapital $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ liefern wird. Erstere wird sich dank unseren Vorbereitungen gut berechnen lassen, wodurch der Nutzen von Seals Formel gegeben ist. Alle Resultate werden wir anhand unseres eingeführten Beispiels näher betrachten und werden letztendlich für dieses in der Lage sein, eine geschlossene Form für alle Ruinwahrscheinlichkeiten anzugeben. Falls nicht explizit anders erwähnt, werden wir ab diesem Kapitel alle Voraussetzungen und Bezeichnungen aus den Kapiteln 2 bis 5 übernehmen.

Wir stellen im Folgenden einige wichtige Integral- und Differentialgleichungen für unsere Ruinwahrscheinlichkeiten auf. Anhand dieser wird es uns möglich sein die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ für unser Beispiel explizit zu berechnen. Dies wird uns zudem eine genauere Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit liefern.

Wir beginnen mit einer Reihe von Erneuerungsgleichungen. Dabei bezeichnen wir für eine Funktion f die Gleichung

$$f(x) = \int_0^x f(x-y) d\mathbb{P}(y) + g(x)$$

als *Erneuerungsgleichung*. Hierbei ist \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß und g eine messbare, reelle Funktion. Wir verwenden dabei, ab diesem Kapitel, die Kurzschreibweise

$$\int_0^x f(x-y) d\mathbb{P}(y) := \int_{[0,x]} f(x-y) d\mathbb{P}(y)$$

für Lebesgue-Integrale über *abgeschlossene Intervalle*. Für Lebesgue-Integrale über halboffene Intervalle werden wir die Kurzschreibweise

$$\int_0^{x-} f(x-y) d\mathbb{P}(y) := \int_{[0,x)} f(x-y) d\mathbb{P}(y)$$

nutzen. Da wir im Folgenden stets $\mathbb{P} = F_U$ annehmen werden und $F_U(0) = 0$ fordern, spielt die Betrachtung der unteren Grenze dieser Integrale keinerlei Rolle.

Die Erneuerungsgleichungen sind Ausgangspunkt vieler theoretischen Überlegungen der Erneuerungstheorie. In der Literatur werden sie auch als Volterra-Integralgleichungen bezeichnet (siehe z.B. [9]). Dieser Begriff stammt allerdings mehr aus dem Bereich der Theorie von Integralgleichungen, weswegen wir bei der in der Risikotheorie üblicheren Bezeichnung der Erneuerungsgleichungen bleiben wollen.

Satz 6.1. *Sei $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u, x)$ in endlicher Zeit folgende Integralgleichung für alle $h \in [0, x]$*

$$\bar{\psi}(u, x) = \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u+\beta s-y, x-s) dF_U(y) ds + \bar{\psi}(u+\beta h, x-h) e^{-\lambda h} \quad (6.1)$$

und somit insbesondere für $h = x$

$$\bar{\psi}(u, x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s) dF_U(y) ds + e^{-\lambda x}. \quad (6.2)$$

Zudem erfüllt $\bar{\psi}(u)$ für alle $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Integralgleichung

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y) dF_U(y) ds + \bar{\psi}(u + \beta h) e^{-\lambda h} \quad (6.3)$$

und somit insbesondere für $h \rightarrow \infty$

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y) dF_U(y) ds. \quad (6.4)$$

Beweis. Wir beginnen zuerst mit einer anschaulichen Deutung von (6.1), welche uns zugleich als Beweisskizze dienen wird. Für jedes h aus dem Intervall $[0, x]$, kann es nur zu den folgenden zwei Ereignissen kommen. Der Zeitpunkt des ersten Schadens T_1 tritt vor bzw. mit h auf (d.h. $T_1 \leq h$) oder T_1 tritt nach h auf (d.h. $T_1 > h$). Wir können also unsere Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u, x)$ unterteilen in die Wahrscheinlichkeiten

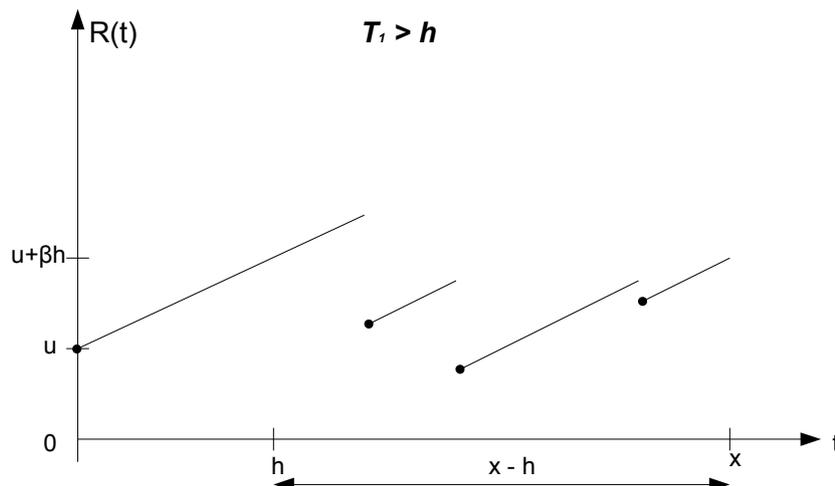
$$\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}(\text{Versicherer übersteht mit } u \text{ den Zeitraum bis } x \text{ und es gilt } T_1 \leq h)$$

sowie

$$\mathbb{P}_2 := \mathbb{P}(\text{Versicherer übersteht mit } u \text{ den Zeitraum bis } x \text{ und es gilt } T_1 > h).$$

Im Falle $T_1 > h$ liegt dem Versicherer zum Zeitpunkt h , aufgrund der konstanten Prämien β , eine freie Reserve von $u + \beta h$ vor. Mit dieser muss er nun nur noch den Zeitraum $x - h$ überstehen. Wir werden zeigen, dass aufgrund der Unabhängigkeit der Schadenszeitpunkte bzw. Schadenshöhen die Wahrscheinlichkeit dafür genau der Wahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u + \beta h, x - h)$ entspricht und dies von der Erstschadenseintrittszeit T_1 unabhängig ist. Da T_1 exponentialverteilt ist, erhalten wir schließlich

$$\mathbb{P}_2 = \bar{\psi}(u + \beta h, x - h) \mathbb{P}(T_1 > h) = \bar{\psi}(u + \beta h, x - h) e^{-\lambda h}.$$

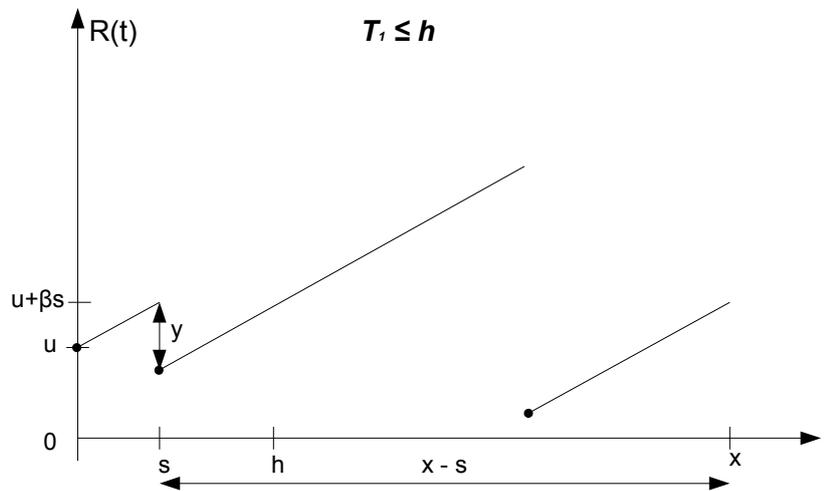


Grafik 6.1. - Beispiel Überlebenswahrscheinlichkeit im Fall $T_1 > h$

Im Falle $T_1 \leq h$ existiert nun ein s aus $[0, h]$, welches unserem Erstschadenseintrittszeitpunkt entspricht. Zu diesem Zeitpunkt wird ein zufälliger Schaden U_1 eintreten. Wählen wir nun einen festen Wert y für unseren Schaden aus, so steht dem Versicherer zum Zeitpunkt s eine freie Reserve von $u + \beta s - y$ zur Verfügung. Ist diese kleiner als 0 (d.h. $y > u + \beta s$), so tritt Ruin ein und folglich ist die Überlebenswahrscheinlichkeit des Versicherers 0. Andererseits muss er wieder mit diesem Kapital den Zeitraum $x - s$ überstehen. Analog zum ersten Fall wird sich zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit hierfür $\bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s)$ entspricht. Integration über alle möglichen Schäden $y \leq u + \beta s$ sowie allen Zeitpunkten s aus $[0, h]$ liefert dann aufgrund der Exponentialverteilung von T_1

$$\mathbb{P}_1 = \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s) dF_U(y) ds,$$

womit wegen $\bar{\psi}(u, x) = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$, Gleichung (6.1) folgt.



Grafik 6.2. - Beispiel Überlebenswahrscheinlichkeit im Fall $T_1 \leq h$

Beweisen wir dies nun formell. Analog zur Beweisskizze definieren wir für ein festes h aus $[0, x]$ nach (5.4)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u, x) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}, T_1 \leq h\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}, T_1 > h\right) \\ &=: \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

mit

$$\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}, T_1 \leq h\right) \text{ und } \mathbb{P}_2 := \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}, T_1 > h\right).$$

Wir beginnen mit dem Fall $T_1 > h$. Da die Sprungzeit T_1 nach Satz 3.6 exponentialverteilt ist, können wir \mathbb{P}_2 wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_2 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid T_1 > h\right) \mathbb{P}(T_1 > h) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid T_1 > h\right) e^{-\lambda h}.\end{aligned}$$

Beachten wir nun die Darstellung (3.9)

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \mathbb{1}_{[\sigma_i, \infty)}(t),$$

so stellen wir, wegen $\sigma_1 = T_1$ fest, dass die Ereignisse $\{T_1 > h\}$ und $\{X_h = 0\}$ identisch sind. Da zudem nach Satz 3.6 $X_t - X_h \sim X_{t-h}$ für alle $t, h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $t \geq h$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_2 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{h \leq t \leq x} \{X_t - 0 \leq u + \beta t\} \mid X_h = 0\right) e^{-\lambda h} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{h \leq t \leq x} \{X_t - X_h \leq u + \beta t\}\right) e^{-\lambda h} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{h \leq t \leq x} \{X_{t-h} \leq u + \beta t\}\right) e^{-\lambda h} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t' \leq x-h} \{X_{t'} \leq u + \beta(t' + h)\}\right) e^{-\lambda h} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t' \leq x-h} \{X_{t'} \leq (u + \beta h) + \beta t'\}\right) e^{-\lambda h} \\ &= \bar{\psi}(u + \beta h, x - h) e^{-\lambda h}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Widmen wir uns nun dem Fall $T_1 \leq h$. Wir erhalten dann mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1 &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}, T_1 \leq h \mid T_1 = s\right) dF_{T_1}(s) \\ &= \int_0^h \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid T_1 = s\right) dF_{T_1}(s) \\ &= \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid T_1 = s\right) ds \\ &= \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid T_1 = s, U_1 = y\right) dF_U(y) ds.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Darstellung (3.9) liefert erneut, wegen $\sigma_1 = T_1$, die Identität der Ereignisse $\{T_1 = s, U_1 = y\}$ und $\{\bigcap_{t < s} \{X_t = 0\}, X_s = y\}$. Mit

$$A_\epsilon := \left\{ \exists (s_\epsilon, y_\epsilon) \in [s, s + \epsilon] \times [y, y + \epsilon] : \bigcap_{t < s_\epsilon} \{X_t = 0\}, X_{s_\epsilon} = y_\epsilon \right\}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

erhalten wir analog zum ersten Fall, aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid T_1 = s, U_1 = y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\} \mid \bigcap_{t < s} \{X_t = 0\}, X_s = y\right) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\mathbb{P}(A_\epsilon)} \mathbb{P}(A_\epsilon, \bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq u + \beta t\}) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\mathbb{P}(A_\epsilon)} \mathbb{P}(A_\epsilon, \bigcap_{s_\epsilon \leq t \leq x} \{X_t - X_{s_\epsilon} \leq u + \beta t - y_\epsilon\}) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(A_\epsilon)}{\mathbb{P}(A_\epsilon)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{s_\epsilon \leq t \leq x} \{X_t - X_{s_\epsilon} \leq u + \beta t - y_\epsilon\}\right) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{P}\left(\bigcap_{s_\epsilon \leq t \leq x} \{X_{t-s_\epsilon} \leq u + \beta t - y_\epsilon\}\right) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t' \leq x-s_\epsilon} \{X_{t'} \leq (u + \beta s_\epsilon - y_\epsilon) + \beta t'\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t' \leq x-s} \{X_{t'} \leq (u + \beta s - y) + \beta t'\}\right) = \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Wegen $\bar{\psi}(u, x) = 0$ für alle $u < 0$ erhalten wir mittels (6.8) sowie (6.7)

$$\mathbb{P}_1 = \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s) dF_U(y) ds. \quad (6.9)$$

Somit folgt nach (6.5), (6.6) sowie (6.9)

$$\bar{\psi}(u, x) = \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s) dF_U(y) ds + \bar{\psi}(u + \beta h, x - h) e^{-\lambda h},$$

womit Gleichung (6.1) gezeigt wurde.

Gleichung (6.2) erhalten wir durch Einsetzen von $h = x$ wegen $\bar{\psi}(u, 0) = 1$ für beliebiges $u \geq 0$.

Analog folgt (6.3) aus (6.1) für $x \rightarrow \infty$, wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u, x) = \bar{\psi}(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und dem Satz der monotonen Konvergenz.

Zuletzt gilt Gleichung (6.4) nach (6.2) für $x \rightarrow \infty$ (bzw. aus (6.3) für $h \rightarrow \infty$). \square

Wir erkennen also, dass es sich bei (6.2) und (6.4) um Erneuerungsgleichungen handelt. Über diese gibt es unzählige Werke, in denen sich mit Lösungen solcher speziellen Gleichungen befasst wird. Eines dieser Bücher ist z.B. [10], welches sich insbesondere mit dem Fall beschränkter Funktionen g befasst, welcher hier mit $g(t) = e^{-\lambda x}$ bzw. $g(t) = 0$ vorliegt. Es ist allerdings oft schwer solche Gleichungen analytisch zu berechnen, sie eignen sich allerdings gut für numerische Berechnungen. Mithilfe des richtigen Ansatzes ist es uns allerdings möglich, die Ruinwahrscheinlichkeit unseres Beispiels durch die Erneuerungsgleichung zu berechnen. Dazu merken wir noch an, dass wir aufgrund von $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$ Gleichung (6.4) zu

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \bar{F}_U(u + \beta s) ds + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \psi(u + \beta s - y) dF_U(y) ds \quad (6.10)$$

umschreiben können.

Satz 6.2. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und $\text{Exp}(\mu)$. So gilt für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta\mu} e^{-(\mu-\lambda/\beta)u}, \quad (6.11)$$

sowie insbesondere

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{\beta\mu}. \quad (6.12)$$

Beweis. Sei $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aufgrund von $\bar{F}_U(u + \beta s) = 1 - F_U(u + \beta s) = e^{-\mu(u+\beta s)}$ sowie $f_U(y) = \mu e^{-\mu y}$ für alle $s, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, erhalten wir mit (6.10)

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\mu\beta + \lambda} e^{-\mu u} + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \psi(u + \beta s) \mu e^{-\mu y} dy ds.$$

Verwenden wir nun den Ansatz $\psi(u) = c_1 e^{-c_2 u}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 e^{-c_2 u} &= \frac{\lambda}{\mu\beta + \lambda} e^{-\mu u} + \lambda c_1 \mu \int_0^\infty e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} e^{-c_2(u+\beta s-y)} e^{-\mu y} dy ds \\ &= \frac{\lambda}{\mu\beta + \lambda} e^{-\mu u} - \frac{\lambda c_1 \mu}{\mu - c_2} \int_0^\infty e^{-\lambda s} [e^{-\mu(u+\beta s)} - e^{-c_2(u+\beta s)}] ds \\ &= \frac{\lambda}{\mu\beta + \lambda} e^{-\mu u} - \frac{\lambda c_1 \mu}{\mu - c_2} \left[\frac{e^{-\mu u}}{\beta\mu + \lambda} - \frac{e^{-c_2 u}}{\lambda + c_2\beta} \right] \\ &= e^{-\mu u} \frac{\lambda}{\mu\beta + \lambda} \left(1 - \frac{c_1 \mu}{\mu - c_2} \right) - e^{-c_2 u} \frac{c_1 \lambda \mu}{(c_2 - \mu)(\lambda + c_2\beta)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mu - c_2 - c_1 \mu &= 0 \\ (\mu - c_2)(\lambda - c_2\beta) &= \lambda\mu, \end{aligned}$$

welches die eindeutigen Lösungen

$$c_1 = \frac{\lambda}{\beta\mu} \text{ sowie } c_2 = \mu - \frac{\lambda}{\beta}$$

besitzt, womit (6.11) nach unserem Ansatz gezeigt ist. Gleichung (6.12) folgt dann direkt für $u = 0$. \square

Anmerkung: Wir sehen zum einen, dass unser c_2 genau dem Anpassungskoeffizient entspricht. Die Cramér-Lundberg-Ungleichung war also bis auf eine Konstante c_1 exakt. Außerdem erkennen wir, dass die Ruinwahrscheinlichkeit für $u = 0$ vom Erwartungswert $1/\mu$ unserer Schäden abhängt. Es lässt sich sogar allgemein zeigen, dass stets

$$\psi(0) = \lambda\mathbb{E}(U_1)/\beta \quad (6.13)$$

gilt. Somit hängt die Ruinwahrscheinlichkeit ohne freie Reserve im stetigen Fall nicht von der konkreten Verteilung der Schäden ab, sondern lediglich von ihrem Erwartungswert. Zudem erhalten wir dank (6.2) nun eine genauere Abschätzung für unsere Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit

$$\psi(u, x) \leq \frac{\lambda}{\beta\mu} e^{-(\mu-\lambda/\beta)u}. \quad (6.14)$$

Satz 6.1 ermöglicht es uns weiterhin, wichtige Eigenschaften der Überlebenswahrscheinlichkeit in endlicher Zeit zu bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst noch folgendes Hilfsresultat.

Satz 6.3. Sei $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine beschränkte, Riemann-integrierbare Funktion auf $[0, \infty)$. Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h g(s) ds = 0. \quad (6.15)$$

Beweis. Da g nur positive Werte annimmt, folgt aufgrund der Beschränktheit von g mit $K := \max_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} g(x)$,

$$0 \leq \int_0^h g(s) ds \leq Kh < \infty.$$

Grenzwertbetrachtung $h \rightarrow 0$ liefert mittels Einschnürungssatz die Behauptung. \square

Wir zeigen nun die Stetigkeit der Überlebenswahrscheinlichkeit bezüglich beider Variablen mittels unserem Hilfsresultat und Satz 6.1.

Satz 6.4. Seien $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann sind $\bar{\psi}(\cdot, x)$ sowie $\bar{\psi}(u, \cdot)$ stetige Funktionen.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stetigkeit bezüglich u . Sei also $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebig aber fest gewählt. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, aufgrund der Monotonie der Überlebensfunktion

$$\bar{\psi}(u + \beta h, x) \geq \bar{\psi}(u, x) \text{ sowie } \bar{\psi}(u, x + h) \leq \bar{\psi}(u, x). \quad (6.16)$$

Somit folgt zum einen die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u + \beta h, x) &\geq \lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u, x) \\ &= \bar{\psi}(u, x). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nach (6.1) gilt zudem für alle $h \in [0, x]$

$$\bar{\psi}(u + \beta h, x) = e^{\lambda h} \left(\bar{\psi}(u, x + h) - \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u + \beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x + h - s) dF_U(y) ds \right).$$

Da $g(s) := \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u + \beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x + h - s) dF_U(y)$ positiv sowie beschränkt ist und das Integral $\int_0^h g(s) ds$ nach obiger Gleichung existiert, liefert uns Satz 6.3 sowie (6.16)

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u + \beta h, x) &= \lim_{h \downarrow 0} e^{\lambda h} \left[\bar{\psi}(u, x + h) - \int_0^h g(s) ds \right] \\ &= \lim_{h \downarrow 0} e^{\lambda h} \bar{\psi}(u, x + h) \\ &\leq \lim_{h \downarrow 0} e^{\lambda h} \bar{\psi}(u, x) \\ &= \bar{\psi}(u, x). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aufgrund von (6.17) und (6.18) ist also

$$\lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u + \beta h, x) = \bar{\psi}(u, x), \quad u \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (6.19)$$

erfüllt und wir erhalten mittels analoger Abschätzungen der endlichen Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u - \beta h, x) \leq \bar{\psi}(u, x),$$

sowie mit $g'(s) := \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u + \beta(s-h)} \bar{\psi}(u + \beta(s-h) - y, x - s) dF_U(y)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u - \beta h, x) &= \lim_{h \downarrow 0} \left[\int_0^h g'(s) ds + e^{-\lambda h} \bar{\psi}(u, x - h) \right] \\ &= \lim_{h \downarrow 0} e^{-\lambda h} \bar{\psi}(u, x - h) \\ &\geq \bar{\psi}(u, x). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \bar{\psi}(u - \beta h, x) = \bar{\psi}(u, x), \quad u \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (6.20)$$

Also ist $\bar{\psi}(\cdot, x)$ wegen (6.19), sowie (6.20) eine stetige Funktion für alle $x \in \mathbb{R}_{> 0}$.

Der Beweis der zweiten Aussage folgt dann direkt aus der Ersten sowie abermaliger Anwendung von (6.1) \square

Anmerkung: Wir haben somit die Stetigkeitsaussage aus dem Beweis von Satz 5.2 nachgeholt und es folgt zudem direkt die Stetigkeit unserer Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u, x)$ bezüglich beider Variablen. Die Stetigkeit von $\psi(u)$ lässt sich analog aus (6.3) herleiten. Unser Beispiel bestätigt diese Aussage, da $\lambda/(\mu\beta)e^{(\mu-\lambda/\beta)u}$ offensichtlich eine stetige Funktion ist.

Als nächstes zeigen wir nun ebenfalls mittels Satz 6.1 eine wichtige partielle Integro-Differentialgleichung, welche f.ü. gültig ist. Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass nach Satz 5.2 die Überlebenswahrscheinlichkeit f.ü. bezüglich u partiell differenzierbar ist.

Satz 6.5. *Es gilt f.ü. folgende partielle Integro-Differentialgleichung für die endliche Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u, x)$*

$$\beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) = \lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) dF_U(y). \quad (6.21)$$

Besitze F_U nun eine Dichte f_U , so gilt insbesondere f.ü.

$$\beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) = \lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) f_U(y) dy. \quad (6.22)$$

Zudem ist $\bar{\psi}(u)$ überall differenzierbar und erfüllt die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{d}{du} \bar{\psi}(u) = \frac{\lambda}{\beta} \bar{\psi}(u) - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^u \bar{\psi}(u - y) f_U(y) dy. \quad (6.23)$$

Beweis. Nach Satz 5.2 ist $\bar{\psi}(\cdot, x)$ f.ü. differenzierbar. Existiere nun also $\frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x)$ für ein $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Mittels (6.1) erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{h} (\bar{\psi}(u + \beta h, x) - \bar{\psi}(u, x + h)) \quad (6.24)$$

$$= \bar{\psi}(u + \beta h, x) \left(\frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} \right) - \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x + h - s) dF_U(y) ds. \quad (6.25)$$

Zudem gilt aufgrund der Stetigkeit von $\bar{\psi}(\cdot, x)$ (nach Satz 6.4)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} \right) \bar{\psi}(u + \beta h, x) = \lambda \bar{\psi}(u, x). \quad (6.26)$$

Die Monotonie von $\bar{\psi}(u, x)$ bezüglich beider Variablen (siehe Satz 5.2) liefert uns nun zudem die Abschätzungen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x + h - s) dF_U(y) ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s) dF_U(y) ds \\
&= \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) dF_U(y),
\end{aligned}$$

sowie zusätzlich nach der Nichtnegativität von $\bar{\psi}(u + \beta t - y, x - t)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x + h - s) dF_U(y) ds \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \lambda e^{-\lambda(t+h)} \int_0^{u+\beta(t+h)} \bar{\psi}(u + \beta(t+h) - y, x - t) dF_U(y) dt \\
&\geq \lim_{h \rightarrow 0} e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+\beta(t+h)} \bar{\psi}(u + \beta t - y, x - t) dF_U(y) dt \\
&\geq \lim_{h \rightarrow 0} e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u + \beta t - y, x - t) dF_U(y) dt \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{\lambda s} \int_0^{u-\beta s} \bar{\psi}(u - \beta s - y, x + s) dF_U(y) ds \\
&= \lambda \int_0^{u-} \bar{\psi}(u - y, x) dF_U(y).
\end{aligned}$$

Fordern wir nun zusätzlich, dass $F_U(u) = F_U(u-)$ erfüllt ist, so gilt nach obigen Abschätzungen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x + h - s) dF_U(y) ds = \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) dF_U(y). \quad (6.27)$$

Die obige Forderung ist f.ü. erfüllt, da F_U eine Verteilungsfunktion ist. Somit sind die Bedingung $F_U(u) = F_U(u-)$ und die Existenz von $\frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x)$ jeweils f.ü. erfüllt und damit insgesamt ebenfalls f.ü. gültig, da die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen erneut abzählbar ist.

Wir erhalten zuletzt, aufgrund der Existenz von $\frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\bar{\psi}(u + \beta h, x) - \bar{\psi}(u, x + h)) = \beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\psi}(u, x + h) - \bar{\psi}(u, x)}{h} \right). \quad (6.28)$$

Grenzwertbetrachtung $h \rightarrow 0$ in (6.25) liefert somit wegen (6.26) - (6.28) die Existenz der rechtsseitigen partiellen Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_+} \bar{\psi}(u, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\psi}(u, x + h) - \bar{\psi}(u, x)}{h} \right)$$

und es gilt

$$\beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x_+} \bar{\psi}(u, x) = \lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) dF_U(y).$$

Analog lässt sich zeigen, dass ebenfalls

$$\frac{\partial}{\partial x_-} \bar{\psi}(u, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\psi}(u, x-h) - \bar{\psi}(u, x)}{h} \right)$$

existiert und

$$\beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x_-} \bar{\psi}(u, x) = \lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u-y, x) dF_U(y)$$

erfüllt ist, womit (6.22) gezeigt wurde.

Die zweite Gleichung folgt dann unweigerlich aus der Ersten, aufgrund der Existenz einer Dichte f_U von F_U .

Beweisen wir nun die dritte Gleichung. Da F_U eine Dichte f_U besitzt, erhalten wir für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mittels (6.3)

$$\beta \frac{\bar{\psi}(u + \beta h) - \bar{\psi}(u)}{\beta h} = \bar{\psi}(u + \beta h) \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+\beta s} \bar{\psi}(u + \beta s - y) f_U(y) dy ds.$$

Grenzwertbetrachtung $h \rightarrow 0$ liefert aufgrund von Satz 6.3 und der Stetigkeit von $\bar{\psi}(u)$ die rechtsseitige Ableitung

$$\beta \frac{d}{du_+} \bar{\psi}(u) = \lambda \bar{\psi}(u) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u-y) f_U(y) dy.$$

Analog lässt sich die Gleichung für die linksseitige Ableitung zeigen, womit die Ableitung von $\bar{\psi}(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert und (6.23) erfüllt. \square

Genau wie unsere Erneuerungsgleichungen, lassen sich diese Integro-Differentialgleichungen ebenfalls in den wenigstens Fällen analytisch lösen und finden eher Anwendung in der Numerik. Mit ihnen lässt sich allerdings angenehm die Ruinwahrscheinlichkeit unseres Beispiels berechnen, was wir im Folgenden nochmals tun möchten. Dazu schreiben wir unsere Integro-Differentialgleichung (6.23) um zu

$$\frac{d}{du} \psi(u) = \frac{\lambda}{\beta} (\psi(u) - \bar{F}_U(u)) - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^u \psi(y-u) f_U(y) dy. \quad (6.29)$$

Alternativer Beweis zu Satz 6.2. Wir nehmen also wieder als Schadensverteilung die Exponentialverteilung mit Parameter μ , welche bekanntlich eine Dichte $f_U(y) = \mu e^{-\mu y}$ für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ besitzt. Dann ist nach Satz 6.5 $\bar{\psi}(u)$ überall differenzierbar und somit ebenfalls $\psi(u)$. Wir erhalten also nach (6.29)

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{\beta} (\psi(u) - e^{-\mu u}) - \frac{\lambda \mu}{\beta} e^{-\mu u} \int_0^u \psi(z) e^{\mu z} dz. \quad (6.30)$$

Dies impliziert, dass $\psi'(u)$ wieder differenzierbar ist und es gilt

$$\psi''(u) = \frac{\lambda}{\beta} \psi'(u) - \mu \left(-e^{-\mu u} - \frac{\lambda \mu}{\beta} e^{-\mu u} \int_0^u \psi(z) e^{\mu z} dz - \frac{\lambda}{\beta} \psi(u) \right) = - \left(\mu - \frac{\lambda}{\beta} \right) \psi'(u).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist z.B. aus [11] bekannt und lautet

$$\psi(u) = c_1 - c_2 e^{-(\mu-\lambda/\beta)u},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ nach (5.14), gilt $c_1 = 0$. Setzen wir unsere Lösung nun in (6.30) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$0 = \left(\frac{\lambda}{\beta} + c_2 \mu \right),$$

womit $c_2 = -\lambda/(\mu\beta)$ erfüllt ist und (6.11) abermals gezeigt wurde. □

Als letztes benötigen wir noch ein kleines Hilfsresultat, welches wir im nächsten Kapitel benutzen werden.

Satz 6.6. *Sei $f(u, x) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bezüglich x stetige Funktion, welche für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Bedingung $\int_0^\infty f(u, x) du < \infty$ erfüllt. Dann ist*

$$F(x) := \int_0^\infty f(u, x) du$$

wohldefiniert. Existiere nun zudem $\frac{\partial}{\partial x} f(u, x)$ für fast alle $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und gelte

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(u, x) \right| \leq g(u), \quad u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit einer Funktion g , welche $\int_0^\infty g(u) du < \infty$ erfüllt. Dann ist F in x differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(u, x) du. \tag{6.31}$$

Beweis. Da $f(u, \cdot)$ f.ü. differenzierbar und stetig ist erhalten wir als Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\left| \frac{f(u, x+h) - f(u, x)}{h} \right| \leq \sup_{y \in (0, \infty)} \left| \frac{\partial}{\partial y} f(u, y) \right| \leq g(u)$$

für fast alle $h \in \mathbb{R}_{> 0}$ und fast alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit ist g eine integrierbare Majorante und wir erhalten nach dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{f(u, x+h) - f(u, x)}{h} du \\ &= \int_0^\infty \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u, x+h) - f(u, x)}{h} du \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(u, x) du. \end{aligned}$$

□

Folgerung 6.7. Sei $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U , mit $F_U(0) = 0$. So gilt für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und fast alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\int_0^\infty e^{-su} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) du = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, x) du. \quad (6.32)$$

Beweis. Setzen wir $f(u, x) := e^{-su} \bar{\psi}(u, x)$, so ist diese Funktion nach Satz 6.4 stetig und erfüllt zudem, wegen $\bar{\psi}(u, x) \leq 1$, für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ die Gleichung

$$\int_0^\infty f(u, x) du \leq \int_0^\infty e^{-su} du = \frac{1}{s} < \infty.$$

Zudem existiert aufgrund der Monotonie von $\bar{\psi}(u, x)$ f.ü. $\frac{\partial}{\partial x} f(u, x) = e^{-su} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x)$ und es gilt mit (6.21) zusätzlich wegen $\frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) \geq 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) \leq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(u, x) \right| &= \left| e^{-su} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) \right| = -e^{-su} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) \\ &= e^{-su} \left[\lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u-y, x) dF_U(y) - \beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) \right] \\ &\leq e^{-su} \left[\lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u-y, x) dF_U(y) \right] \\ &\leq e^{-su} \lambda \bar{\psi}(u, x) \leq \lambda e^{-su} =: g(u). \end{aligned}$$

Da $\int_0^\infty g(u) du = \frac{\lambda}{s} < \infty$ für beliebiges $s \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt ist, gelten alle Voraussetzungen von Satz 6.6 und wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, x) du = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{-su} \bar{\psi}(u, x) du = \int_0^\infty e^{-su} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) du.$$

□

Wir sind nun in der Lage uns dem Hauptresultat dieser Arbeit zu widmen.

7. Die Formeln von Seal

Wir werden in diesem Kapitel Seals Formeln betrachten, welche zwei entscheidende Vorteile mit sich bringen. Zum einen bieten sie eine komfortable Berechnung zur Überlebenswahrscheinlichkeit in endlicher Zeit ohne freie Reserve ($\bar{\psi}(0, x)$) und stellen im Anschluss den Fall $u \in \mathbb{R}_{>0}$ durch $\bar{\psi}(0, y)$ dar. Zum anderen hängen beide Formeln direkt von der Verteilungsfunktion $F_{X_t}(x)$ unseres Gesamtschadenprozesses $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ ab. Diese beiden, bis zu diesem Zeitpunkt weitestgehend unbekannt, Formeln wurden 1969 in H.L.Seals Buch „Stochastic Theory of a Risk Business“ ([12]) vorgestellt. Ihre Ursprünge gehen aber auf Tacàcs ([4]) und Prabhu ([13]) zurück. Wir erinnern an dieser Stelle nochmals an Satz 3.6. Besitze U die Dichte f_U und gelte $F_U(0) = 0$, so gilt

$$F_{X_t}(x) = e^{-\lambda t} + \int_0^x \tilde{f}_{X_t}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (7.1)$$

wobei $\tilde{f}_{X_t}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda t)^n / n!) e^{-\lambda t} f_{U^{n*}}(y)$ gelte und $f_{U^{n*}}(y)$ die Dichte der n -fachen Faltung von U bezeichne.

Satz 7.1 (Seal). *Sei $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U , mit $F_U(0) = 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$*

$$\bar{\psi}(0, x) = \frac{1}{\beta x} \mathbb{E}(R_x)_+ = \frac{1}{\beta x} \int_0^{\beta x} F_{X_x}(y) dy. \quad (7.2)$$

Sei nun $u \in \mathbb{R}_{>0}$ und F_U besitze die Dichte f_U , dann erhalten wir

$$\bar{\psi}(u, x) = F_{X_x}(u + \beta x) - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy. \quad (7.3)$$

Beweis. Beweisen wir zunächst die erste Aussage. Wegen $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ erhalten wir nach Satz 3.6, dass der Prozess $Y(t) := \frac{X(t)}{\beta}$ ebenfalls ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Wegen $F_U(0) = 0$ gilt somit auch $F_{(1/\beta)U}(0) = F_U(\beta 0) = 0$, weswegen $Y(t)$ positive Zuwächse besitzt. Es gilt mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit sowie Satz 4.3

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{Y_t \leq t\}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{Y_t \leq t\} \mid Y_x\right)\right) = \mathbb{E}\left(1 - \frac{Y_x}{x}\right)_+ = \mathbb{E}\left(1 - \frac{X_x}{\beta x}\right)_+$$

wegen

$$\bar{\psi}(u, x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{X_t \leq \beta t\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leq t \leq x} \{Y_t \leq t\}\right)$$

gilt also zudem mit $R(t) = \beta t - X(t)$ für $u = 0$

$$\bar{\psi}(u, x) = \mathbb{E}\left(1 - \frac{X_x}{\beta x}\right)_+ = \frac{1}{\beta x} \mathbb{E}(R_x)_+,$$

womit das erste Gleichheitszeichen in (7.2) bewiesen ist.

Es gilt nun mittels partieller Integration und $F_{X_x}(0-) = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_x)_+ &= \mathbb{E}(\beta x - X_x)_+ = \int_{[0, \beta x]} (\beta x - y) dF_{X_x}(y) \\ &= [(\beta x - \beta x)F_{X_x}(y)] - [\beta x F_{X_x}(0-)] + \int_0^{\beta x} F_{X_x}(y) dy = \int_0^{\beta x} F_{X_x}(y) dy.\end{aligned}$$

Somit ist ebenfalls das zweite Gleichheitszeichen in (7.2) erfüllt.

Widmen wir uns nun Formel (7.3). Da eine Dichte f_U von F_U existiert, erhalten wir nach Satz 6.5 f.ü.

$$\beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) + \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) f_U(y) dy - \lambda \bar{\psi}(u, x) = 0.$$

Wählen wir nun $s \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig, so existiert, aufgrund der Beschränktheit von $\bar{\psi}(u, x)$ mit Satz 2.12, die Laplace-Transformierte $\hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) := \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, x) du$. Multiplizieren wir nun obige Gleichung mit e^{-su} und integrieren über $(0, \infty)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes, so erhalten wir mit Folgerung 6.7

$$\int_0^\infty e^{-su} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) du = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, x) du = \frac{\partial}{\partial x} \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x), \quad (7.4)$$

sowie mittels (2.47) und (2.48) die Gleichung

$$\beta \left(s \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) - \bar{\psi}(0, x) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) + \lambda \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) \left(\hat{L}_{f_U}(s) - 1 \right) = 0. \quad (7.5)$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe z.B. [11]) wissen wir, dass die allgemeine Lösung zu (7.5) durch

$$\hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) = \left(c(s) - \int_0^x \bar{\psi}(0, y) \beta e^{-(\beta s + \lambda(\hat{L}_{f_U}(s) - 1))y} dy \right) e^{(\beta s + \lambda(\hat{L}_{f_U}(s) - 1))x}, \quad (7.6)$$

für eine Konstante $c(s)$ bezüglich x gegeben ist. Setzen wir speziell $x = 0$, so erhalten wir

$$c(s) = \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, 0) = \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, 0) du = s^{-1},$$

da $\bar{\psi}(u, 0) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Es gilt nun weiterhin wegen $F_{X_t}(0-) = 0$, der Beschränktheit von \tilde{f}_{X_t} , (2.47) und (7.1)

$$\begin{aligned}\hat{B}_{F_{X_t}(v)}(s) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-sv} F_{X_t}(v) dv = \int_0^\infty e^{-sv} F_{X_t}(v) dv \\ &= \int_0^\infty e^{-sv} e^{-\lambda t} dv + \int_0^\infty e^{-sv} \left(\int_0^v \tilde{f}_{X_t}(y) dy \right) dv \\ &= \frac{1}{s} e^{-\lambda t} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sv} \tilde{f}_{X_t}(v) dv = \frac{1}{s} e^{-\lambda t} + \frac{1}{s} \hat{B}_{\tilde{f}_{X_t}(v)}(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} e^{-\lambda t} + \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-sv} f_{U^{n*}}(v) dv \\
&= \frac{1}{s} e^{-\lambda t} + \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t \hat{L}_{f_U}(s))^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
&= s^{-1} e^{\lambda t (\hat{L}_{f_U}(s) - 1)}.
\end{aligned}$$

Somit ist zusätzlich mit (2.46)

$$s^{-1} e^{(\beta s + \lambda (\hat{L}_{f_U}(s) - 1))t} = \hat{B}_{F_{X_t}(v + \beta t)}(s)$$

erfüllt, sowie

$$e^{(\beta s + \lambda (\hat{L}_{f_U}(s) - 1))t} = e^{(\beta s - \lambda)t} + \hat{B}_{\tilde{f}_{X_t}(v + \beta t)}(s)$$

gültig. Für den zweiten Term in (7.6) liefert uns dies nun mittels dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \bar{\psi}(0, y') \beta e^{(\beta s + \lambda (\hat{L}_{f_U}(s) - 1))(x - y')} dy' \\
&= \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \beta e^{(\beta s + \lambda (\hat{L}_{f_U}(s) - 1))y} dy \\
&= \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \beta e^{(\beta s - \lambda)y} dy + \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \beta \hat{B}_{\tilde{f}_{X_y}(v + \beta y)}(s) dy \\
&= \int_{-\beta x}^0 e^{-vs} \bar{\psi}(0, x + \frac{v}{\beta}) e^{\lambda \frac{v}{\beta}} dv + \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \tilde{f}_{X_y}(v + \beta y) dv dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vs} \left(\bar{\psi}(0, x + \frac{v}{\beta}) e^{\lambda \frac{v}{\beta}} \mathbb{1}_{[-\beta x, 0]}(v) \right) dv \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \left(\beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(v + \beta y) dy \right) dv \\
&= \hat{B}_{\bar{\psi}(0, x + \frac{v}{\beta}) e^{\lambda \frac{v}{\beta}} \mathbb{1}_{[-\beta x, 0]}(v)}(s) + \hat{B}_{\beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(v + \beta y) dy}(s).
\end{aligned}$$

Zusätzlich wegen (2.42) und (2.45) erhalten wir zusammenfassend

$$\hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) = \hat{B}_{\bar{\psi}(u, x)}(s) = \hat{B}_{F_{X_x}(u + \beta x) - \bar{\psi}(0, x + \frac{u}{\beta}) e^{\lambda \frac{u}{\beta}} \mathbb{1}_{[-\beta x, 0]}(u) - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy}(s), \quad (7.7)$$

für beliebiges $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $u \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\mathbb{1}_{[-\beta x, 0]}(u) = 0$ womit (7.3) zusätzlich nach Satz 2.15 f.ü. gültig ist. Da beide Seiten der Gleichung für $u \in \mathbb{R}_{>0}$ stetig sind, folgt (7.3) für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. \square

Anmerkung: Betrachten wir (7.3) näher, so stellen wir fest, dass $F_{X_x}(u + \beta x)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereigniss $R_x \geq 0$ ist. Dies ist nach (5.4) natürlich eine notwendige Bedingung für das Überleben. Der zweite Term in (7.3) beschreibt somit die Wahrscheinlichkeit, dass $R_x \geq 0$ erfüllt ist, aber Ruin bis zum Zeitpunkt x eingetreten ist. Es lässt sich zeigen, dass dieser nach dem letzten Zeitpunkt $y \leq x$ bedingt, für den $R_y = 0$ gilt.

Als erste Anwendung der Formeln von Seal werden wir zeigen, dass sich unsere Parameter auf bestimmte Art modifizieren lassen, ohne dass sich die Ruinwahrscheinlichkeit ändert.

Folgerung 7.2. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gewählt, dass sie folgende Beziehungen erfüllen

$$\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 \text{ sowie } \beta_1 x_1 = \beta_2 x_2. \quad (7.8)$$

Sei nun F_U eine Verteilungsfunktion mit $F_U(0) = 0$ und Dichte f_U . Zudem seien $X_1(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ_1 und F_U sowie $X_2(t)$ ein zus. Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ_2 und F_U . Dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\bar{\psi}_1(u, x_1) = \bar{\psi}_2(u, x_2), \quad (7.9)$$

wobei $\bar{\psi}_1(u, x_1)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bezüglich des Gesamtschadensprozesses $X_1(t)$ mit Prämienrate β_1 und $\bar{\psi}_2(u, x_2)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bez. $X_2(t)$ mit Prämienrate β_2 bezeichnet.

Seien alternativ $q, \beta, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie F_U eine Verteilungsfunktion mit $F_U(0) = 0$ und Dichte f_U . Bezeichnen $X(t)$ den zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U sowie $X_q(t)$ den zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_{qU} . Dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\bar{\psi}_q(qu, x) = \bar{\psi}(u, x), \quad (7.10)$$

wobei $\bar{\psi}_q(qu, x)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bezüglich des Gesamtschadensprozesses $X_q(t)$ mit Prämienrate $q\beta$ und $\bar{\psi}(u, x)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bez. $X(t)$ mit Prämienrate β bezeichnet.

Beweis. Sei zunächst $x_1 = 0$, so folgt aus (7.8) $x_2 = 0$, womit die Behauptung unweigerlich aus (5.8) folgt. Der Fall $x_2 = 0$ folgt analog.

Seien nun also $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir erhalten dann mittels (7.1) sowie dem ersten Teil unserer Voraussetzungen (7.8) für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} F_{X_{1x_1}}(y) &= e^{-\lambda_1 x_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x_1)^n}{n!} e^{-\lambda_1 x_1} \int_0^y f_U^{n*}(z) dz \\ &= e^{-\lambda_2 x_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_2 x_2)^n}{n!} e^{-\lambda_2 x_2} \int_0^y f_U^{n*}(z) dz = F_{X_{2x_2}}(y). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Wir bemerken insbesondere, dass dann ebenfalls

$$\tilde{f}_{X_{1x_1}}(y) = \tilde{f}_{X_{2x_2}}(y) \quad (7.12)$$

für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Somit liefert die erste Formel von Seal (7.2) erneut mittels den Voraussetzungen (7.8)

$$\bar{\psi}_1(0, x_1) = \frac{1}{\beta_1 x_1} \int_0^{\beta_1 x_1} F_{X_{1x_1}}(y) dy$$

$$= \frac{1}{\beta_2 x_2} \int_0^{\beta_2 x_2} F_{X_{2x_2}}(y) dy = \bar{\psi}_2(0, x_2), \quad (7.13)$$

womit bereits der Fall $u = 0$ gezeigt wurde.

Sei also nun $u \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir merken zunächst noch an, dass aufgrund von $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ ebenfalls die Beziehung

$$\frac{\lambda_1}{\beta_1} = \frac{\lambda_2}{\beta_2} \quad (7.14)$$

aus unseren Voraussetzungen folgt. Somit liefert die zweite Formel von Seal (7.3) zusätzlich wegen (7.11)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(u, x_1) &= F_{X_{1x_1}}(u + \beta_1 x_1) - \beta_1 \int_0^{x_1} \bar{\psi}_1(0, x_1 - y) \tilde{f}_{X_{1y}}(u + \beta_1 y) dy \\ &= F_{X_{2x_2}}(u + \beta_2 x_2) - \int_0^{\beta_2 x_2} \bar{\psi}_1(0, x_1 - \frac{z}{\beta_1}) \tilde{f}_{X_{1\frac{z}{\beta_1}}}(u + z) dz. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Definieren wir nun für beliebiges aber festes $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Zahlen $\tilde{x}_1 := z/\beta_1$ sowie $\tilde{x}_2 := z/\beta_2$, so gilt wegen (7.14)

$$\lambda_1 \tilde{x}_1 = z \frac{\lambda_1}{\beta_1} = z \frac{\lambda_2}{\beta_2} = \lambda_2 \tilde{x}_2.$$

Somit sind die Voraussetzungen für (7.12) geschaffen und wir erhalten für alle $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\tilde{f}_{X_{1\frac{z}{\beta_1}}}(u + z) = \tilde{f}_{X_{1\tilde{x}_1}}(u + z) = \tilde{f}_{X_{1\tilde{x}_2}}(u + z) = \tilde{f}_{X_{2\frac{z}{\beta_2}}}(u + z).$$

Mittels analogen Überlegungen lassen sich für $x'_1 := x_1 - z/\beta_1$ und $x'_2 := x_2 - z/\beta_2$ unsere Bedingungen (7.8) erneut zeigen, womit (7.13)

$$\bar{\psi}_1(0, x_1 - \frac{z}{\beta_1}) = \bar{\psi}_1(0, x'_1) = \bar{\psi}_1(0, x'_2) = \bar{\psi}_2(0, x_2 - \frac{z}{\beta_2})$$

liefert. Somit lässt sich (7.15) weiterführen zu

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(u, x_1) &= F_{X_{2x_2}}(u + \beta_2 x_2) - \int_0^{\beta_2 x_2} \bar{\psi}_1(0, x_1 - \frac{z}{\beta_1}) \tilde{f}_{X_{1\frac{z}{\beta_1}}}(u + z) dz \\ &= F_{X_{2x_2}}(u + \beta_2 x_2) - \int_0^{\beta_2 x_2} \bar{\psi}_2(0, x_2 - \frac{z}{\beta_2}) \tilde{f}_{X_{2\frac{z}{\beta_2}}}(u + z) dz \\ &= \bar{\psi}_2(u, x_2), \end{aligned}$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

Der Beweis der zweiten Behauptung folgt auf analoge Weise aus Seals Formeln. \square

Wir erkennen also, dass wir unsere Zeit- sowie Geldeinheiten frei wählen können und lediglich die Parameter nach Satz 7.2 modifizieren müssen.

Als nächstes werden wir nun in der Lage sein, die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit für unser Beispiel mit exponentialverteilten Schäden mit Hilfe von Seals Formeln explizit zu berechnen. Wir hatten bereits in Satz 5.8 die Verteilungsfunktion

$$F_{X_t}(x) = e^{-(\lambda t + \mu x)} J(\lambda t \mu x) + e^{-\lambda t} \int_0^{\mu x} e^{-y} J(\lambda t y) dy$$

und Dichte

$$\tilde{f}_{X_t}(y) = \lambda t \mu e^{-(\lambda t + \mu y)} J'(\lambda t \mu y)$$

unserer Gesamtschadensverteilung für alle $t, x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gezeigt. Hierbei bezeichnete J unsere Hilfsfunktion aus (5.15).

Satz 7.3. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und $\text{Exp}(\mu)$. So gilt für alle $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\psi(u, x) = 1 - e^{-\mu u - (1+c)\lambda x} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x), \quad (7.16)$$

mit $c = \mu\beta/\lambda$ und

$$g(z, \theta) = J(\theta z) + \theta J'(\theta z) + \int_0^z e^{z-v} J(\theta v) dv - \frac{1}{c} \int_0^{c\theta} e^{c\theta-v} J(zc^{-1}v) dv. \quad (7.17)$$

Insbesondere also für $u = 0$

$$\psi(0, x) = 1 - e^{-(1+c)\lambda x} g(c\lambda x, \lambda x). \quad (7.18)$$

Beweis. Analog zu Seals Formel beginnen wir mit dem Fall $u = 0$. Dann erhalten wir wegen $\int_0^a \int_0^y f(v) dv dy = \int_0^a (a-y)f(y) dy$, mittels (3.14) und (5.26) nach (7.2)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(0, x) &= \frac{1}{\beta x} \int_0^{\beta x} F_{X_x}(y) dy = \frac{1}{\beta x} \int_0^{\beta x} e^{-\lambda x} dy + \frac{1}{\beta x} \int_0^{\beta x} \int_0^y \tilde{f}_{X_x}(v) dv dy \\ &= e^{-\lambda x} + \frac{\lambda \mu}{\beta} e^{-\lambda x} \int_0^{\beta x} \int_0^y e^{-\mu v} J'(\lambda x \mu v) dv dy \\ &= e^{-\lambda x} + \frac{\lambda \mu}{\beta} e^{-\lambda x} \int_0^{\beta x} (\beta x - y) e^{-\mu y} J'(\lambda x \mu y) dy. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Schließlich gilt wegen den Eigenschaften (5.19) sowie (5.20) von J

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \mu}{\beta} e^{-\lambda x} \int_0^{\beta x} (\beta x - y) e^{-\mu y} J'(\lambda x \mu y) dy &= e^{-(\mu\beta + \lambda)x} J(\lambda \mu \beta x^2) - e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-(\mu\beta + \lambda)x} J'(\lambda \mu \beta x^2) \\ &\quad + \left(\frac{\beta \mu - \lambda}{\beta} \right) \int_0^{\beta x} e^{-(\mu y + \lambda x)} J(\lambda \mu x y) dy \\ &= e^{-\lambda x(1+c)} J(\lambda \mu \beta x^2) - e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x(1+c)} J'(\lambda \mu \beta x^2) \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\beta\mu - \lambda}{\beta\mu} \right) \int_0^{\mu\beta x} e^{-(w+\lambda x)} J(\lambda x w) dw,$$

womit nach (7.19)

$$e^{\lambda x(1+c)} \bar{\psi}(0, x) = J(c\lambda^2 x^2) + \lambda x J'(c\lambda^2 x^2) + \left(\frac{c-1}{c} \right) \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - w} J(\lambda x w) dw = g(c\lambda x, \lambda x)$$

folgt. Also gilt

$$\bar{\psi}(0, x) = e^{-\lambda x(1+c)} g(c\lambda x, \lambda x),$$

womit (7.18) gezeigt wurde.

Die Herleitung unserer Lösung (7.16) aus der zweiten Formel von Seal ist recht mühselig aber elementar. Er lässt sich in voller Länge in [1] auf den Seiten 197-202 nachlesen und wir wollen deshalb an dieser Stelle darauf verzichten. Stattdessen werden wir nachweisen, dass unsere Lösung die partielle Integro-Differentialgleichung (6.22) erfüllt, was einen alternativen Beweis darstellt.

Wir bemerken, dass aufgrund der Differenzierbarkeit von $J(x)$ (siehe Satz 5.7) die Funktion $g(\mu u + c\lambda x, \lambda x)$ partiell bezüglich u sowie x differenzierbar ist. Wie die partielle Integro-Differentialgleichung vermuten lässt, werden wir insbesondere die partiellen Ableitungen sowie die Stammfunktion der Funktion $g(\mu u + c\lambda x, \lambda x)$ benötigen. In den folgenden Rechnungen werden wir stets alle Gleichungen und Erkenntnisse aus Satz 5.7 verwenden. Zudem führen wir die Kurzschreibweise $a(u, x) := \mu u \lambda x + c\lambda^2 x^2 = \lambda x(\mu u + c\lambda x)$ ein. Es gilt somit für alle $u, x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) &= J(a(u, x)) + \lambda x J'(a(u, x)) \\ &+ \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv - \frac{1}{c} \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die partielle Ableitung bezüglich u mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) &= \mu \lambda x J'(a(u, x)) + \mu \lambda^2 x^2 J''(a(u, x)) + \mu J(a(u, x)) \\ &+ \mu \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv - \frac{\mu}{c^2} \int_0^{c\lambda x} v e^{c\lambda x - v} J'\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv \\ &= \mu g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) + \mu \lambda^2 x^2 J''(a(u, x)) \\ &- \frac{\mu}{c^2} \int_0^{c\lambda x} v e^{c\lambda x - v} J'\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv + \frac{\mu}{c} \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv, \end{aligned}$$

sowie für die partielle Ableitung nach x

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) \\
&= (\mu u \lambda + 2c\lambda^2 x) J'(a(u, x)) + \lambda J'(a(u, x)) + \lambda x (\mu u \lambda + 2c\lambda^2 x) J''(a(u, x)) \\
&\quad + c\lambda J(a(u, x)) + c\lambda \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) \, dv \\
&\quad + \lambda \int_0^{\mu u + c\lambda x} v e^{\mu u + c\lambda x - v} J'(\lambda x v) \, dv - \lambda J(a(u, x)) \\
&\quad - \lambda \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) \, dv - \frac{\lambda}{c} \int_0^{c\lambda x} v e^{c\lambda x - v} J'\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) \, dv \\
&= c\lambda g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) + (\mu u \lambda + c\lambda^2 x) J'(a(u, x)) + c\lambda^3 x^2 J''(a(u, x)) \\
&\quad + \lambda \int_0^{\mu u + c\lambda x} v e^{\mu u + c\lambda x - v} J'(\lambda x v) \, dv - \frac{\lambda}{c} \int_0^{c\lambda x} v e^{c\lambda x - v} J'\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) \, dv \\
&= c\lambda g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) + c\lambda^3 x^2 J''(a(u, x)) \\
&\quad + \lambda \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) \, dv - \frac{\lambda}{c} \int_0^{c\lambda x} v e^{c\lambda x - v} J'\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) \, dv.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Darstellungen folgt somit

$$\begin{aligned}
& \beta \frac{\partial}{\partial u} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) - \frac{\partial}{\partial x} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) \\
&= \frac{c\lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial u} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) - \frac{\partial}{\partial x} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) \\
&= \lambda \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) \, dv - \lambda \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) \, dv,
\end{aligned}$$

womit sich insbesondere wegen $\bar{\psi}(u, x) = 1 - \psi(u, x) = e^{-\mu u - (1+c)\lambda x} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x)$

$$\begin{aligned}
& \beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) \\
&= \lambda \bar{\psi}(u, x) + e^{-\mu u - (1+c)\lambda x} \left(\beta \frac{\partial}{\partial u} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) - \frac{\partial}{\partial x} g(\mu u + c\lambda x, \lambda x) \right) \\
&= \lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{-\lambda x - v} J(\lambda x v) \, dv + \lambda \int_0^{c\lambda x} e^{-\mu u - \lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) \, dv, \quad (7.20)
\end{aligned}$$

für unsere Lösung (7.16) ergibt.

Widmen wir uns nun der Stammfunktion von $g(\mu v + c\lambda x, \lambda x)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_0^u g(\mu v + c\lambda x, \lambda x) dv \\ &= \int_0^u J(\mu v \lambda x + c\lambda^2 x^2) dv + \lambda x \int_0^u J'(\mu v \lambda x + c\lambda^2 x^2) dv \\ & \quad + \int_0^u \int_0^{\mu v + c\lambda x} e^{\mu v + c\lambda x - y} J(\lambda x y) dy dv - \frac{1}{c} \int_0^u \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - y} J\left(\left(\frac{\mu v}{c} + \lambda x\right) y\right) dy dv. \end{aligned}$$

Mit $a(0, x) = c\lambda^2 x^2$ sowie den Eigenschaften aus Satz 5.7 gilt somit

$$\begin{aligned} & \int_0^u g(\mu v + c\lambda x, \lambda x) dv \\ &= \int_0^u J(\mu v \lambda x + c\lambda^2 x^2) dv + \frac{1}{\mu} J(a(u, x)) - \frac{1}{\mu} J(a(0, x)) \\ & \quad + \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv - \frac{1}{\mu} \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv \\ & \quad - \int_0^u J(\lambda x \mu v + c\lambda^2 x^2) dv - \frac{1}{c} \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - y} \int_0^u J\left(\left(\frac{\mu v}{c} + \lambda x\right) y\right) dv dy \\ &= \frac{1}{\mu} J(a(u, x)) - \frac{1}{\mu} J(a(0, x)) + \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv - \frac{1}{\mu} \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv \\ & \quad - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J'\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) dv + \frac{1}{\mu} \lambda x \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J'(\lambda x v) dv \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{\mu u + c\lambda x - v} J(\lambda x v) dv - \frac{1}{\mu} \int_0^{c\lambda x} e^{c\lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right) v\right) dv. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung folgt für unsere Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) f_U(y) dy &= \mu \int_0^u e^{-\mu(u-y) - (1+c)\lambda x} g(\mu(u-y) + c\lambda x, \lambda x) e^{-\mu y} dy \\ &= \mu e^{-\mu u - (1+c)\lambda x} \int_0^u g(\mu v + c\lambda x, \lambda x) dv \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{-\lambda x - v} J(\lambda x v) dv - \int_0^{c\lambda x} e^{-\mu u - \lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv.$$

Setzen wir dies in (7.20) ein, so folgt unsere partielle Integro-Differentialgleichung (6.22), womit (7.16) alternativ bewiesen wurde. \square

Anmerkung: 1.) Wie bereits im Beweis angedeutet, erkennen wir insbesondere, dass die Lösung (7.16) der Ruinwahrscheinlichkeit für exponentielle Schäden stetig und partiell differenzierbar bezüglich beider Variablen ist.

2.) Wir wollen nun noch kurz zeigen, dass sie auch unsere Randbedingungen erfüllt. Betrachten wir zuerst den Fall $x = 0$, so ist wegen $J(0) = 1$ mit

$$\bar{\psi}(u, 0) = e^{-\mu u} g(\mu u, 0) = e^{-\mu u} \left(1 + \int_0^{\mu u} e^{\mu u - v} dv\right) = 1,$$

die Randbedingung (5.8) erfüllt. Zudem gilt analog zum Beweis von (5.21)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{-\lambda x - v} J(\lambda x v) dv &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n! n!} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{-v} v^n dv \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} = 1, \end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{c\lambda x} e^{-\mu u - \lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv = e^{-\mu u(1-1/c)}.$$

An der Reihendarstellung von $J(x)$ erkennen wir schnell, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x J(x) = 0$ gilt. Somit erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u, x) = 1 - \frac{1}{c} e^{-\mu u(1-1/c)} = 1 - \frac{\lambda}{\mu\beta} e^{-(\mu - \lambda/\beta)u},$$

was nach (6.11) der Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u)$ entspricht und somit die Randbedingung (5.6) erfüllt.

3.) Zeigen wir zuletzt noch, dass die Erneuerungsgleichung (6.1) ebenfalls für unsere Lösung gültig ist. Mit analogen Rechnungen zum Beweis von Satz 7.3, erhalten wir insbesondere für alle $u, x, h, s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $h, s \leq x$

$$\begin{aligned} C(u, x, s) &:= \int_0^{u+\beta x} \bar{\psi}(u + \beta s - y, x - s) f_U(y) dy \\ &= \int_0^{\mu u + c\lambda x} e^{-\lambda(x-s) - v} J(\lambda(x-s)v) dv - \int_0^{c\lambda(x-s)} e^{-\mu u - \lambda(x+cs-s) - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) dv. \end{aligned}$$

Zudem gilt mit $a(u, x) = \mu u \lambda x + c \lambda^2 x^2$ sowie $b(u, x) := (\mu u \lambda + c \lambda^2 x)(x - h)$ nach einigen Umformungen sowie den Eigenschaften aus Satz 5.7

$$\begin{aligned}
D_1(u, x, h) &:= \lambda \int_0^h \int_0^{\mu u + c \lambda x} e^{-\lambda x - v} J(\lambda(x - s)v) \, dv \, ds \\
&= \int_0^{\mu u + c \lambda x} e^{-\lambda x - v} (\lambda x J'(\lambda v x) - \lambda(x - h) J'(\lambda v(x - h))) \, dv \\
&= e^{-\lambda x - \mu u - c \lambda x} (J(a(u, x)) - J(b(u, x))) + \int_0^{\mu u + c \lambda x} e^{-\lambda x - v} (J(\lambda x v) - J(\lambda(x - h)v)) \, dv.
\end{aligned}$$

Analog dazu erhalten wir ebenso

$$\begin{aligned}
D_2(u, x, h) &:= \lambda \int_0^h \int_0^{c \lambda(x-s)} e^{-\mu u - c \lambda s - \lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) \, dv \, ds \\
&= \frac{1}{c} \int_0^{c \lambda x} e^{-\mu u - \lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) \, dv - \frac{1}{c} \int_0^{c \lambda(x-h)} e^{-\mu u - \lambda x - \lambda c h - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) \, dv \\
&\quad - \lambda \int_0^h e^{-\mu u - \lambda x - c \lambda x} J((\mu u \lambda + c \lambda^2 x)(x - s)) \, ds \\
&= \frac{1}{c} \int_0^{c \lambda x} e^{-\mu u - \lambda x - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) \, dv - \frac{1}{c} \int_0^{c \lambda(x-h)} e^{-\mu u - \lambda x - \lambda c h - v} J\left(\left(\frac{\mu u}{c} + \lambda x\right)v\right) \, dv \\
&\quad - e^{-\lambda x - \mu u - c \lambda x} (\lambda x J'(a(u, x)) - \lambda(x - h) J'(b(u, x))).
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
D_1(u, x, h) - D_2(u, x, h) &= e^{-\mu u - (1+c)\lambda x} (g(\mu u + c \lambda x, \lambda x) - g(\mu u + c \lambda x, \lambda(x - h))) \\
&= \bar{\psi}(u, x) - \bar{\psi}(u + \beta h, x - h) e^{-\lambda h},
\end{aligned}$$

womit wegen $\int_0^h \lambda e^{-\lambda s} C(u, x, s) \, ds = D_1(u, x, h) - D_2(u, x, h)$ die Erneuerungsgleichung (6.1) gezeigt ist.

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir uns noch einer erweiterten Form von Seals Formeln widmen. Wir werden dazu die zweite Formel von Seal für den Fall von Verteilungen ohne Dichte verallgemeinern. Dabei werden wir weiterhin $F_U(0) = 0$ fordern, so dass unsere Einzelschadensverteilung keinen Sprung an der Stelle 0 aufweist. Die erste Formel von Seal bleibt dabei unverändert, da für diese nicht die Existenz einer Dichte gefordert wurde.

Wir stellen nun zunächst fest, dass die Gesamtschadensverteilung F_{X_t} abzählbar viele Sprünge aufweisen kann, welche den Sprungstellen aller n -fachen Faltungen von F_U entsprechen. Dies geht unweigerlich aus der Darstellung

$$F_{X_t}(x) = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_{U^{n*}}(x) \quad (7.21)$$

hervor. Wir erkennen zudem, dass die Sprungstelle nicht von der konkreten Wahl des Parameters t abhängt. Dieser beeinflusst lediglich die Sprunghöhe. Der Sprung an der Stelle 0 bleibt zudem unverändert und hängt nicht von der Wahl der Einzelschadensverteilung F_U ab, weswegen wir ihn weiterhin gesondert betrachten. F_{X_t} bleibt allerdings f.ü. differenzierbar und besitzt somit eine schwache Ableitung \tilde{f}_{X_t} . Zusammengefasst können wir F_{X_t} also alternativ schreiben als

$$F_{X_t}(x) = e^{-\lambda t} + \sum_{i=1}^{\infty} (F_{X_t}(a_i) - F_{X_t}(a_i-)) \mathbb{1}_{[a_i, \infty)}(x) + \int_0^x \tilde{f}_{X_t}(y) dy. \quad (7.22)$$

Dabei fassen wir das hintere Integral als Lebesgue-Integral auf und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei die Folge aller Sprungstellen von F_{X_t} . Wir werden zudem im Folgenden kurz

$$S_{i,t} := F_{X_t}(a_i) - F_{X_t}(a_i-), \quad i \in \mathbb{N} \quad (7.23)$$

schreiben.

Besitzt beispielsweise F_U genau einen Sprung an der Stelle $P \in \mathbb{R}_{>0}$, so besitzt für alle $n \in \mathbb{N}$ die n -fache Faltung von F_U genau einen Sprung an der Stelle nP . Somit gilt für dieses Beispiel $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (nP)_{n \in \mathbb{N}}$.

Führen wir weiterhin die so genannte *Laplace-Stieltjes-Transformierte* einer Verteilungsfunktion F_U ein. Diese ist definiert durch

$$\{\mathcal{L}F_U\}(s) := \int_{[0, \infty)} e^{-su} dF_U(u) = \int_0^{\infty} e^{-su} dF_U(u), \quad s \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (7.24)$$

Da wir weiterhin $F_U(0) = 0$ fordern, ist die Nutzung der Kurzschreibweise für Lebesgue-Integrale gerechtfertigt.

Falls F_U eine Dichte f_U besitzt, so erkennen wir, dass die Laplace-Stieltjes-Transformierte von F_U der Laplace-Transformierten von f_U entspricht. Dies legt nahe, dass beide Transformationen ähnliche Eigenschaften aufweisen, auf dessen genaue Beweisführung an dieser Stelle verzichtet wird. Unter anderem gilt jedoch die Faltungseigenschaft, aus der wir mittels analogen Überlegungen zum Beweis von Satz 7.1 die Gleichung

$$s^{-1} e^{\lambda t (\{\mathcal{L}F_U\}(s) - 1)} = \hat{B}_{F_{X_t}(v)}(s), \quad (7.25)$$

für den allgemeineren Fall für Verteilungsfunktionen F_U ohne Dichte erhalten.

Ebenfalls aus der Faltungseigenschaft erhalten wir die Gleichung

$$\int_0^{\infty} e^{-su} \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u-y, x) dF_U(y) du = \lambda \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) \{\mathcal{L}F_U\}(s), \quad (7.26)$$

womit wir nun in der Lage sind unsere verallgemeinerte zweite Formel von Seal anzugeben und zu beweisen.

Satz 7.4 (Seal-Allgemein). Sei $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U , mit $F_U(0) = 0$. Dann besitzt F_{X_t} für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ f.ü. eine Ableitung \tilde{f}_{X_t} und es gilt für alle $x, u \in \mathbb{R}_{> 0}$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u, x) &= F_{X_x}(u + \beta x) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}\left(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}\right) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{[u, u + \beta x]}(a_i) \\ &\quad - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Dabei sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Menge aller Sprungstellen von F_{X_t} und $S_{i,t} = F_{X_t}(a_i) - F_{X_t}(a_i -)$ deren Sprunghöhe.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 7.1 (Seal). Wir weisen hauptsächlich auf die Unterschiede hin und berechnen diese. Die f.ü. Existenz der Ableitung folgt dabei unweigerlich aus der Tatsache, dass F_{X_t} eine Verteilungsfunktion ist.

Nach Satz 6.5 gilt f.ü. die Gleichung

$$\beta \frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) = \lambda \bar{\psi}(u, x) - \lambda \int_0^u \bar{\psi}(u - y, x) dF_U(y).$$

Erneut multiplizieren wir diese, für beliebiges aber festes $s \in \mathbb{R}_{> 0}$, mit e^{su} und integrieren über $(0, \infty)$. Wir erhalten dann zusätzlich wegen (7.26)

$$\beta \left(s \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) - \bar{\psi}(0, x) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) + \lambda \hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) (\{\mathcal{L}F_U\}(s) - 1) = 0.$$

Im Vergleich zu (7.5) hat sich also lediglich die Laplace-Transformierte geändert und wurde durch die allgemeinere Laplace-Stieltjes-Transformierte ersetzt. Das selbe geschieht also auch in unserer Lösung

$$\hat{L}_{\bar{\psi}}(s, x) = \left(s^{-1} - \int_0^x \bar{\psi}(0, y) \beta e^{-(\beta s + \lambda(\{\mathcal{L}F_U\}(s) - 1))y} dy \right) e^{(\beta s + \lambda(\{\mathcal{L}F_U\}(s) - 1))x}.$$

Gleichung (7.25) liefert uns nun mittels Verschiebung den erster Term der Lösung

$$s^{-1} e^{(\beta s + \lambda(\{\mathcal{L}F_U\}(s) - 1))x} = \hat{B}_{F_{X_x}(v + \beta x)}(s).$$

Des Weiteren erhalten wir mittels Darstellung (7.22) für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ analog zum Beweis von Satz 7.1 (Seal)

$$\begin{aligned} \hat{B}_{F_{X_t}(v)}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sv} F_{X_t}(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sv} e^{-\lambda t} dv + \sum_{i=1}^{\infty} S_{i,t} \int_0^{\infty} e^{-sv} \mathbb{1}_{[a_i, \infty)}(v) dv \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-sv} \left(\int_0^v \tilde{f}_{X_t}(y) dy \right) dv \end{aligned}$$

$$= s^{-1}e^{-\lambda t} + s^{-1}K(t, s) + s^{-1}\hat{B}_{\tilde{f}_{X_t}(v)}(s),$$

mit

$$K(t, s) := s \sum_{i=1}^{\infty} S_{i,t} \int_0^{\infty} e^{-sv} \mathbb{1}_{[a_i, \infty)}(v) dv.$$

Da alle a_i positiv sind, können wir dies umformen zu

$$K(t, s) = s \sum_{i=1}^{\infty} S_{i,t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \mathbb{1}_{[a_i, \infty)}(v) dv.$$

Somit erhalten wir erneut nach Verschiebung

$$e^{(\beta s + \lambda(\{\mathcal{L}F_U\}(s)-1))t} = s e^{\beta s t} \hat{B}_{F_{X_t}(v)}(s) = e^{(\beta s - \lambda)t} + e^{\beta s t} K(t, s) + \hat{B}_{\tilde{f}_{X_t}(v+\beta t)}(s).$$

Dies liefert uns nun für den zweiten Term der Lösung

$$\begin{aligned} & \int_0^x \bar{\psi}(0, y') \beta e^{(\beta s + \lambda(\hat{L}_{F_U}(s)-1))(x-y')} dy' \\ &= \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta e^{(\beta s + \lambda(\hat{L}_{F_U}(s)-1))y} dy \\ &= \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta e^{(\beta s - \lambda)y} dy + \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta e^{\beta s y} K(y, s) dy \\ &+ \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta \hat{B}_{\tilde{f}_{X_y}(v+\beta y)}(s) dy. \end{aligned}$$

Den ersten und dritten Term haben wir bereits im Beweis des Satzes von Seal berechnet, womit wir diese Ergebnisse erneut verwenden können. Widmen wir uns also lediglich dem zweiten Term, so erhalten wir mittels Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta e^{\beta s y} K(y, s) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta S_{i,y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv'} e^{\beta s y} \mathbb{1}_{[a_i, \infty)}(v') dv' \right) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta S_{i,y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \mathbb{1}_{[a_i, \infty)}(v + \beta y) dv \right) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(0, x-y) \beta S_{i,y} \mathbb{1}_{[0, x]}(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \mathbb{1}_{[\frac{a_i-v}{\beta}, \infty)}(y) dv \right) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(0, x-y) \beta S_{i,y} \mathbb{1}_{[\frac{a_i-v}{\beta}, \infty)}(y) \mathbb{1}_{[0, x]}(y) dy \right) dv \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} \left(\beta \int_{\frac{a_i-v}{\beta}}^{\infty} \bar{\psi}(0, x-y) S_{i,y} \mathbb{1}_{[0, x]}(y) dy \right) dv \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} s \hat{B}_{\beta} \int_{\frac{a_i-v}{\beta}}^{\infty} \bar{\psi}(0, x-y) S_{i,y} \mathbb{1}_{[0,x]}(y) dy (s) = \sum_{i=1}^{\infty} s \hat{B}_{f_i(v)}(s),$$

wobei wir

$$f_i(v) := \beta \int_{\frac{a_i-v}{\beta}}^{\infty} \bar{\psi}(0, x-y) S_{i,y} \mathbb{1}_{[0,x]}(y) dy$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gesetzt haben. Da die Integrationsgrenzen sowie die innere Funktion des Integrals allesamt stetige, differenzierbare Funktionen bezüglich v sind, liefert die Leibniz-Regel für Parameterintegrale für alle $i \in \mathbb{N}$

$$f'_i(v) = \bar{\psi}(0, x - \frac{a_i - v}{\beta}) S_{i, \frac{a_i - v}{\beta}} \mathbb{1}_{[0,x]}(\frac{a_i - v}{\beta}).$$

Da zudem für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f_i(v) = \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) S_{i,y} dy \leq \beta x < \infty$$

sowie

$$f_i(v) = 0, \quad v \leq a_i - \beta x$$

gelten, erhalten wir mittels partieller Integration

$$s \hat{B}_{f_i(v)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} s e^{-sv} f_i(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sv} f'_i(v) dv = \hat{B}_{f'_i(v)}(s).$$

Zusammengefasst gilt also

$$\begin{aligned} & \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \beta e^{\beta s y} K(y, s) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s \hat{B}_{f_i(v)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{B}_{f'_i(v)}(s) \\ &= \hat{B}_{\sum_{i=1}^{\infty} f'_i(v)}(s) = \hat{B}_{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}(0, x - \frac{a_i - v}{\beta}) S_{i, \frac{a_i - v}{\beta}} \mathbb{1}_{[0,x]}(\frac{a_i - v}{\beta})}(s) \\ &= \hat{B}_{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}(0, x - \frac{a_i - v}{\beta}) S_{i, \frac{a_i - v}{\beta}} \mathbb{1}_{[v, v + \beta x]}(a_i)}(s). \end{aligned}$$

In (7.7) wird obiger Term also lediglich mit $v = u$ subtrahiert. Zusätzlich wegen $u \in \mathbb{R}_{>0}$ und (2.45) erhalten wir also

$$\hat{B}_{\bar{\psi}(u,x)}(s) = \hat{B}_{F_{X_x}(u+\beta x) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{[u, u + \beta x]}(a_i) - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \tilde{f}_{X_y}(u+\beta y) dy}(s).$$

Nach Eindeutigkeitssatz der zweiseitigen Laplace Transformation (Satz 2.15) gilt somit Gleichung (7.27) fast überall. Es reicht also zu zeigen, dass beider Seiten stetige Funktionen sind. Wir haben dies bereits in Satz 6.4 für die linke Seite dieser Gleichung getan.

Betrachten wir also nun die rechte Seite der Gleichung. Wir stellen zunächst fest, dass der letzte Term bezüglich u bzw. x eine stetige Funktion ist. Dies folgt unweigerlich aus Satz 6.4 und der Tatsache, dass die schwache Ableitung einer Verteilungsfunktion fast überall stetig ist.

Weiterhin gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, wegen $X_0 = 0$ und $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$

$$S_{i,0} = F_{X_0}(a_i) - F_{X_0}(a_i-) = 1 - 1 = 0,$$

womit sich Formel (7.27) umschreiben lässt zu

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u, x) &= F_{X_x}(u + \beta x) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}\left(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}\right) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x]}(a_i) \\ &\quad - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy. \end{aligned}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig aber fest gewählt und wählen wir $u \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $a_{i_0} = u + \beta x$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$ erfüllt ist (d.h. F_{X_x} besitzt einen Sprung an der Stelle $u + \beta x$). Dann gilt mit $\bar{\psi}(0, 0) = 1$ sowie $S_{i_0, x} = F_{X_x}(u + \beta x) - F_{X_x}(u + \beta x-)$

$$\begin{aligned} F_{X_x}(u + \beta x) &- \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}\left(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}\right) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x]}(a_i) \\ &= F_{X_x}(u + \beta x) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}\left(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}\right) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x)}(a_i) - \bar{\psi}(0, 0) S_{i_0, x} \\ &= F_{X_x}(u + \beta x-) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}\left(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}\right) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x)}(a_i). \end{aligned}$$

Letzteres entspricht dem linksseitigen Grenzwert bezüglich u an der Stelle $u + \beta x$. Da zudem F_{X_t} bezüglich t eine stetige Funktion ist (siehe Darstellung (7.1)), gilt gleiches für $S_{i,t}$ bezüglich t . Somit ist die rechte Seite unserer Gleichung (7.27) eine stetige Funktion bezüglich u . Der Fall für festes u und variables x wird analog gezeigt.

Zusammengefasst ist unsere Gleichung überall erfüllt und die Aussage des Satzes wurde bewiesen. \square

Mithilfe von Satz 7.4 können wir nun feststellen, wie sich die Ruinwahrscheinlichkeit nach Approximation der Einzelschadensverteilung verhält.

Folgerung 7.5. Seien $\lambda, \beta, P \in \mathbb{R}_{>0}$ und F_U eine Verteilungsfunktion mit $F_U(0) = 0$ sowie $F_U(P-) < F_U(P)$. Sei zudem $F_{U,\epsilon}$ für $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Verteilungsfunktion mit $F_{U,\epsilon}(0) = 0$ und existenter Dichte $f_{U,\epsilon}$. Gelte weiterhin für alle $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{U,\epsilon}(y) = F_U(y).$$

Zuletzt seien $X(t)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U sowie $X_\epsilon(t)$ ein zus. Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und $F_{U,\epsilon}$. Dann gilt für alle $u, x \in \mathbb{R}_{>0}$, für die ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $i_0 P \in (u, u + \beta x]$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}_\epsilon(u, x) > \bar{\psi}(u, x). \quad (7.28)$$

Hierbei bezeichnet $\bar{\psi}(u, x)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bezüglich des Gesamtschadensprozesses $X(t)$ und $\bar{\psi}_\epsilon(u, x)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bzgl. $X_\epsilon(t)$, jeweils mit Prämienrate β .

Beweis. Da F_U eine Verteilungsfunktion ist, existiert f.ü. die Ableitungen \tilde{f}_U . Da zudem $F_{U,\epsilon}$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Dichte $f_{U,\epsilon}$ besitzt, gilt für fast alle $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{U,\epsilon}(y) = \tilde{f}_U(y).$$

Somit lässt sich rekursiv zeigen, dass auch für alle $n \in \mathbb{N}$ die n -fache Faltung von $F_{U,\epsilon}$ gegen die n -fache Faltung von F_U konvergiert. Daraus folgt für alle $x, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{X_{\epsilon t}}(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_{U,\epsilon}^{n*}(x) \right) \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_U^{n*}(x) \\ &= F_{X_t}(x), \end{aligned}$$

womit ebenfalls die Gesamtschadensverteilungen (und somit auch ihre f.ü. existenten Ableitungen $\tilde{f}_{X_{\epsilon t}}$ und \tilde{f}_{X_t}) gegeneinander konvergieren. Dies liefert mittels (7.2) sowie dem Satz der majorisierten Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}_\epsilon(0, x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta x} \int_0^{\beta x} F_{X_{\epsilon t}}(y) dy \\ &= \frac{1}{\beta x} \int_0^{\beta x} F_{X_t}(y) dy = \bar{\psi}(0, x). \end{aligned}$$

Wegen $\bar{\psi}_\epsilon(0, x - y) \tilde{f}_{X_{\epsilon y}}(u + \beta y) \leq 1$ gilt nun nach Satz 7.1, zusätzlich mit dem Satz der majorisierten Konvergenz,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}_\epsilon(u, x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{X_{\epsilon x}}(u + \beta x) - \beta \int_0^x \bar{\psi}_\epsilon(0, x - y) \tilde{f}_{X_{\epsilon y}}(u + \beta y) dy \\ &= F_{X_x}(u + \beta x) - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $F_U(P-) < F_U(P)$ folgt nun nach unseren Vorbetrachtungen, dass $(iP)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erfüllt ist. Existiert also ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $i_0P \in (u, u + \beta x]$ so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x]}(a_i) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}(0, x - \frac{iP - u}{\beta}) S_{i, \frac{iP - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x]}(iP) \\ &\geq \bar{\psi}(0, x - \frac{i_0P - u}{\beta}) S_{i_0, \frac{i_0P - u}{\beta}} > 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}_\epsilon(u, x) &= F_{X_x}(u + \beta x) - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy \\ &> F_{X_x}(u + \beta x) - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}(0, x - \frac{a_i - u}{\beta}) S_{i, \frac{a_i - u}{\beta}} \mathbb{1}_{(u, u + \beta x]}(a_i) \\ &\quad - \beta \int_0^x \bar{\psi}(0, x - y) \tilde{f}_{X_y}(u + \beta y) dy \\ &= \bar{\psi}(u, x), \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Anmerkung: Wir stellen also insbesondere fest, dass die Existenz einer Einzelschadensdichte eine notwendige Bedingung zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit mittels Seals Formeln darstellt. Berechnungen der Überlebenswahrscheinlichkeit via Formel (7.3) führen also selbst bei Approximation der Verteilung zu einer Vergrößerung des Ergebnisses, falls die Gesamtschadensverteilung Sprünge im Bereich $(u, u + \beta x]$ aufweist. Insbesondere wird damit die falsch errechnete bzw. approximierte Ruinwahrscheinlichkeit kleiner als das tatsächliche Ergebnis. Wir werden zudem später bemerken, dass selbst grundlegende Rückversicherungsverfahren die Einzelschadensverteilung soweit modifizieren können, dass sie hinterher Sprünge besitzen. Somit sind die vorangegangenen Überlegungen sinnvoll und wir werden sie später erneut aufgreifen.

Da wir nun alle grundlegenden Formeln und Eigenschaften der Ruinwahrscheinlichkeit betrachtet haben und diese ebenfalls am Beispiel von exponentialverteilten Schäden nachweisen konnten, werden wir uns ab dem nächsten Kapitel mit Anwendungen von Seals Formel beschäftigen.

8. Die Roulette-Aufgabe

Wir wollen uns ab diesem Kapitel mit dem Bereich der Rückversicherungen befassen und einige Berechnungen diesbezüglich anstellen. Dazu werden sich Seals Formeln als hilfreiches Werkzeug erweisen. Es kann, z.B. aufgrund von Naturkatastrophen, dazu kommen, dass eine Versicherung schnell an die Grenzen ihrer Kapazität gelangt. Um dieses Risiko einzudämmen, bedienen sich Versicherungen oft an Rückversicherungen. Diese versichern somit die Versicherung und werden deshalb auch als „Versicherung der Versicherung“ bezeichnet. Die Idee der Rückversicherung stammt, genauso wie die der Versicherung, aus der Seefahrt. Mit dem Beginn und der Zunahme selbiger, wuchs das Interesse der Händler daran, dass ihre Ladung unversehrt ihr Ziel erreicht. Da dies, u.a. aufgrund von Piraterie und Unwetter, nicht stets gewährleistet werden konnte, begannen die Händler, sich gegen die Ausfallrisiken zu versichern. Dazu wurde im Jahre 1370 in Genua der erste Vertrag abgeschlossen, der Merkmale einer Rückversicherung enthielt. Wir beginnen nun zunächst mit einer Motivationsrechnung, welche die Notwendigkeit von Rückversicherungen mathematisch begründet.

Wir befassen uns mit einer einfachen Roulette-Aufgabe und betrachten dazu diskrete Schäden am Ende einer Periode. Im Gegensatz zum stetigen Fall, treten somit Schäden lediglich zu den Zeitpunkten $t_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$ ein. Um dies auszugleichen, stehen dem Versicherer seine freie Reserve $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sowie eine diskrete Prämie $c \in \mathbb{R}_{> 0}$, welche ebenfalls am Ende einer Periode ausgezahlt wird, zur Verfügung. Zudem werden wir nichtnegative Schäden U_i zulassen. Viele Aussagen aus Kapitel 5 lassen sich auch für den Fall diskreter Schäden in analoger Weise zeigen. Dabei gilt z.B. für unsere Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u)$ die Gleichung

$$\bar{\psi}(u) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ u + nc - \sum_{i=1}^n U_i \geq 0 \right\} \right).$$

In unserem Motivationsbeispiel, der Roulette-Aufgabe, werden unsere Schäden eine Zwei-Punkt-Verteilung besitzen. Sei dazu $M \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$ mit $M \geq 2$ und $p < 1/M$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$F_U(x) = (1 - p) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) + p \mathbb{1}_{[M, \infty)}(x), \quad (8.1)$$

wobei $\mathbb{1}$ erneut die Indikatorfunktion bezeichnet. Wählen wir für unsere diskrete Prämie $c = 1$, so gilt

$$EU = Mp < 1 = c,$$

welches die analoge Bedingung zur Bedingung von Satz 5.5, für den Fall von diskreten Schäden und diskreter Prämie darstellt.

Berechnen wir nun für unser Beispiel die diskrete Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u)$. Wir merken dazu noch an, dass sich unsere Erneuerungsgleichung (6.4) im diskreten Fall zu

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^{u+c} \bar{\psi}(u + c - y) dF_U(y) \quad (8.2)$$

vereinfachen lässt. Alternativ kann der Beweis von (8.2) auch in [7] nachgelesen werden. Außerdem bezeichne \mathcal{U}_n für $n \in \mathbb{N}$ die diskrete Gleichverteilung auf der Menge $\{1, \dots, n\}$, d.h. es gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$\mathcal{U}_n(\{j\}) = \frac{1}{n} \text{ bzw. } \mathcal{U}_n(j) = \sum_{i=1}^j \mathcal{U}_n(\{i\}) = \frac{j}{n}.$$

Offensichtlich ist zudem $\mathcal{U}_n(u) = \mathcal{U}_n(\lfloor u \rfloor)$ für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt, wobei $\lfloor u \rfloor$ den ganzzahligen Anteil von u angibt. Somit erhalten wir die erzeugende Funktion von \mathcal{U}_n mit

$$e_{\mathcal{U}_n}(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s^k, \quad s \in [0, 1]. \quad (8.3)$$

Satz 8.1. *Seien $M \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ mit $M \geq 2$ sowie $p < 1/M$ und $c = 1$. Dann gilt mit $F_U = (1-p)\mathbb{1}_{[0, \infty)} + p\mathbb{1}_{[M, \infty)}$ für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \bar{\psi}(0)]^n \mathcal{U}_{M-1}^{n*}(u). \quad (8.4)$$

Dabei ist

$$\bar{\psi}(0) = 1 - \frac{p(M-1)}{1-p} \quad (8.5)$$

und \mathcal{U}_n^{*j} bezeichnet die j -fache Faltung von \mathcal{U}_n .

Beweis. Da die Summe $\sum_{j=1}^n U_i$ auf $\{0, M, 2M, \dots, nM\} \subseteq \mathbb{N}_0$ konzentriert ist und $c = 1$ gilt, erkennen wir leicht, dass $\bar{\psi}(u)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ auf $[k, k+1)$ konstant ist. Es genügt also

$$a_k := \bar{\psi}(k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (8.6)$$

zu bestimmen. Aufgrund entsprechender Eigenschaften der Überlebenswahrscheinlichkeit ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge. Unsere diskrete Erneuerungsgleichung (8.2) liefert dann für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$a_k = (1-p)a_{k+1} + pa_{k+1-M} \mathbb{1}_{[M-1, \infty)}(k).$$

Dies können wir für $s \in [0, 1]$ mit s^k multiplizieren und anschließend über alle $k \in \mathbb{N}_0$ summieren und erhalten mit der Definition $e_a(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ der erzeugenden Funktion einer monoton wachsenden, beschränkten Folge

$$e_a(s) = \frac{1-p}{s}(e_a(s) - a_0) + ps^{M-1}e_a(s).$$

Dies lässt sich nach einigen Schritten umstellen zu

$$(1-s)e_a(s) = \frac{a_0}{1 - \frac{p(M-1)}{1-p}e_{\mathcal{U}_{M-1}}(s)}. \quad (8.7)$$

Somit existiert aufgrund von $e_{\mathcal{U}_{M-1}}(1) = 1$ der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} (1-s)e_a(s) = \frac{a_0}{1 - \frac{p(M-1)}{1-p}}. \quad (8.8)$$

Zudem erhalten wir direkt aus der Definition der erzeugenden Funktion die Gleichung

$$(1-s)e_a(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})s^k. \quad (8.9)$$

Wie bereits angemerkt, gilt wegen $EU < c$ Satz 5.5 analog für den diskreten Fall und liefert uns

$$1 = \lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}).$$

Somit erhalten wir mit dem Abelschen Grenzwertsatz zusätzlich nach (8.8)

$$1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = \lim_{s \rightarrow 1-0} (1-s)e_a(s) = \frac{a_0}{1 - \frac{p(M-1)}{1-p}},$$

womit nach (8.6) Formel (8.5) erfüllt ist. Dies liefert uns nun nach (8.7)

$$(1-s)e_a(s) = \frac{a_0}{1 - (1-a_0)e_{\mathcal{U}_{M-1}}(s)} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_0)^n [e_{\mathcal{U}_{M-1}}(s)]^n,$$

wodurch uns Koeffizientenvergleich wegen (8.9) und

$$[e_{\mathcal{U}_{M-1}}(s)]^n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_{M-1}^{n*}(\{k\})s^k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

die Gleichung

$$a_k - a_{k-1} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_0)^n \mathcal{U}_{M-1}^{n*}(\{k\}) \quad (8.10)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ liefert. Die explizite Lösung einer Rekursion

$$b_k - b_{k-1} = f(k), \quad k \in \mathbb{N} \text{ mit } f(0) = b_0$$

lässt sich durch einfache Induktion bestimmen und lautet $b_k = \sum_{i=0}^k f(i)$. Somit liefert uns (8.10)

$$a_k = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_0)^n \sum_{i=0}^k \mathcal{U}_{M-1}^{n*}(\{i\}) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (1-a_0)^n \mathcal{U}_{M-1}^{n*}(k),$$

womit wegen (8.6) Gleichung (8.4) gezeigt wurde. \square

Wir betrachten nun zwei Roulette-Spieler mit unterschiedlichen Taktiken und wollen für diese die Ruinwahrscheinlichkeit des Casinos berechnen. Beide Spieler benötigen pro Spiel einen Einsatz $c = 1$. Wir gehen davon aus, dass beide zudem über genügend Kapital verfügen. Spieler A wird stets auf eine Farbe setzen. Die Verlustchancen des Casinos sind mit $p_A = 18/37$ relativ hoch, der potentielle Verlust $M_A = 2$ hingegen niedrig. Spieler B wird im Gegenzug dazu stets auf eine Zahl setzen und somit das Casino mit $p_B = 1/37$ und $M_B = 36$ vor die entgegengesetzte Situation stellen. Wir stellen fest, dass in beiden Fällen, mit $EU_A = EU_B = 36/37 < 1 = c$, der erwartete Verlust des Casinos pro Runde gleich hoch ist. Somit ist unsere Modellannahme zulässig und wir können die Ruinwahrscheinlichkeit des Casinos berechnen. Dabei bezeichnen $\psi_A(u)$ (bzw. $\psi_B(u)$) die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, falls Spieler A (bzw. B) „unendlich lange“ spielen und dem Casino eine freie Reserve $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zur Verfügung steht.

Satz 8.2. *Unter allen Annahmen des obigen Absatzes gilt für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$\psi_A(u) < \psi_B(u). \quad (8.11)$$

Beweis. Es reicht erneut die Aussage für $\lfloor u \rfloor =: k \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen. Wegen

$$1 = (1 - \psi(0)) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(0)^n \text{ und } \psi(k) = 1 - \bar{\psi}(k),$$

erhalten wir nach Satz 8.1

$$\psi(k) = (1 - \psi(0)) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(0)^n (1 - \mathcal{U}_{M-1}^{n*}(k)), \quad (8.12)$$

für die Ruinwahrscheinlichkeit bei einer Zwei-Punkt-Schadensverteilung. Hierbei gilt zudem

$$\psi(0) = \frac{p(M-1)}{1-p}. \quad (8.13)$$

Wir erhalten somit insbesondere für unsere Spieler mit $p_A = 18/37, M_A = 2$ sowie $p_B = 1/37, M_B = 36$

$$\psi_A(0) = \frac{18}{19} \approx 0.947 \text{ und } \psi_B(0) = \frac{35}{36} \approx 0.972,$$

womit der Fall $u = 0$ gezeigt ist.

Da für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung $\mathcal{U}_1(k) = \mathbb{1}_{[1,\infty)}(k)$ nach Definition der diskreten Gleichverteilung erfüllt ist, erhalten wir insbesondere für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{U}_1^{n*}(k) = \mathbb{1}_{[n,\infty)}(k) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k < n, \\ 1, & \text{wenn } k \geq n. \end{cases}$$

Somit gilt nach (8.12),

$$\psi_A(k) = (1 - \psi_A(0)) \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_A(0)^n = (\psi_A(0))^{k+1}. \quad (8.14)$$

Da \mathcal{U}_{35} nur natürliche Werte größer oder gleich eins annimmt, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{U}_{35}^{n*}(k) = 0, \quad k < n.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \psi_B(k) &= (1 - \psi_B(0)) \left(\sum_{n=0}^k \psi_B(0)^n (1 - \mathcal{U}_{35}^{n*}(k)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_B(0)^n \right) \\ &= (1 - \psi_B(0)) \sum_{n=0}^k \psi_B(0)^n (1 - \mathcal{U}_{35}^{n*}(k)) + (\psi_B(0))^{k+1}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

womit sich mittels (8.14),

$$\psi_B(k) - \psi_A(k) = (1 - \psi_B(0)) \sum_{n=0}^k \psi_B(0)^n (1 - \mathcal{U}_{35}^{n*}(k)) + (\psi_B(0))^{k+1} - (\psi_A(0))^{k+1}$$

ergibt. Da x^{k+1} eine streng monoton wachsende Funktion ist und $\psi_B(0)^n (1 - \mathcal{U}_{35}^{n*}(k)) > 0$ für alle $n = 0, \dots, k$ gilt, folgt $\psi_B(k) - \psi_A(k) > 0$, womit die Behauptung bewiesen wurde. \square

Anhand dieser Rechnung erahnen wir, dass für ein Casino große Schäden mit geringer Wahrscheinlichkeit gefährlicher sind, als kleine Schäden mit großer Wahrscheinlichkeit. Um dies weiter zu untermauern wurden in Tabelle 8.1. weitere Daten gesammelt. Zur Ermittlung dieser, wurde ein kleines Programm geschrieben (siehe Quelltext A.1), welches auf den Berechnungen aus Satz 8.1 beruht.

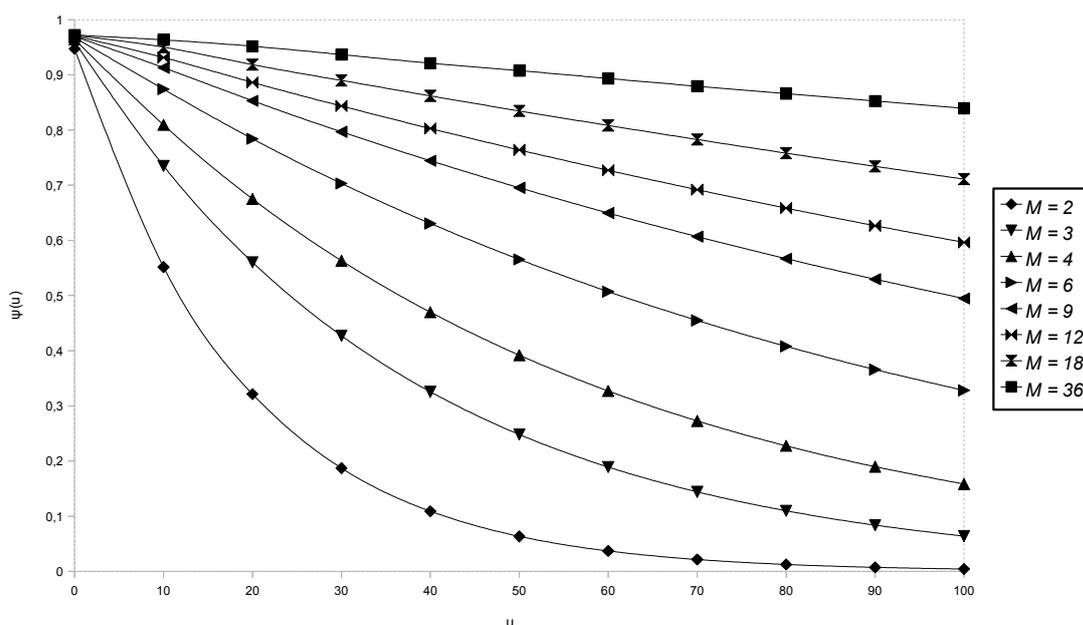
Es wurde dabei stets der Fall $EU = Mp = 36/37 < 1 = c$ betrachtet, womit sich p unweigerlich aus M berechnen lässt und somit $\psi(0)$ in (8.13) nur von M abhängig ist. Anstatt lediglich die Wettmöglichkeiten $M = 2$ (Rouge) und $M = 36$ (Plein) auszuwerten, konnten somit auch Werte für die Fälle $M = 3$ (Douzaines), $M = 6$ (Transversale Simple), $M = 9$ (Carrè), $M = 12$ (Les trois premiers), $M = 18$ (Cheval) sowie, der Vollständigkeit halber, $M = 4$, berechnet werden.

Tabelle 8.1.

Ruinwahrscheinlichkeit des Casinos bei konstantem Schadenserwartungswert

M	2	3	4	6	9	12	18	36
p	0,4865	0,3243	0,2432	0,1622	0,1081	0,0811	0,0541	0,0270
Var(U)	1,00	1,97	2,95	4,89	7,81	10,73	16,57	34,08

u	M = 2	M = 3	M = 4	M = 6	M = 9	M = 12	M = 18	M = 36
0	0,94737	0,96000	0,96429	0,96774	0,96970	0,97059	0,97143	0,97222
10	0,55171	0,73511	0,80939	0,87410	0,91310	0,93149	0,95020	0,96347
20	0,32129	0,56031	0,67517	0,78410	0,85310	0,88636	0,91866	0,95195
30	0,18711	0,42707	0,56322	0,70319	0,79689	0,84355	0,89001	0,93681
40	0,10896	0,32552	0,46983	0,63064	0,74442	0,80278	0,86197	0,92119
50	0,06345	0,24811	0,39193	0,56556	0,69541	0,76397	0,83470	0,90768
60	0,03695	0,18912	0,32695	0,50721	0,64962	0,72704	0,80837	0,89347
70	0,02152	0,14415	0,27274	0,45487	0,60685	0,69189	0,78285	0,87948
80	0,01253	0,10987	0,22752	0,40794	0,56689	0,65845	0,75814	0,86605
90	0,00730	0,08374	0,18979	0,36584	0,52956	0,62661	0,73422	0,85262
100	0,00425	0,06383	0,15832	0,32810	0,49470	0,59632	0,71104	0,83941



Grafik 8.1. - diskrete Ruinwahrscheinlichkeit der Roulette-Aufgabe

Anhand von Grafik 8.1. erkennen wir, dass $\psi(u)$ bei konstantem M eine monoton fallende Funktion bezüglich u ist, genauso wie es sein sollte. Mit steigendem M fallen die Funktionen allerdings immer schwächer. Während sich im Fall $M = 2$ die Ruinwahrscheinlichkeit mit freier Reserve 0 zur freien Reserve 100 um 99,6% reduziert (von 94,7% auf 0,4%), fällt sie im Fall $M = 36$ lediglich um 13,7% (von 97,2% auf 83,9%).

Dies ist intuitiv nachvollziehbar, wenn man die Wahrscheinlichkeit des kürzest möglichen Ruins des Casinos ermittelt. Um im Fall $M = 36$ bei einem Startkapital von 100 bankrott zu gehen, sind lediglich drei direkte Folgeschäden von Nöten. Die Wahrscheinlichkeit dazu beträgt $(1/37)^3 \approx 2 * 10^{-5}$. Im Gegensatz dazu sind für $M = 2$ bei gleichem Startkapital 101 direkte Folgeschäden nötig um schnellst möglichen Ruin zu erreichen. Mit $(18/37)^{101} \approx 2,5 * 10^{-32}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür also signifikant geringer. Insbesondere ist $\psi(u)$ monoton steigend bezüglich M , bei konstantem u . Es ist somit sinnvoll, Schäden in gewisser Form rückzuversichern. Wir werden uns nun im nächsten Kapitel damit beschäftigen die Art der Rückversicherung so zu bestimmen, dass unsere endliche Ruinwahrscheinlichkeit minimiert wird.

9. Rückversicherung

Wir haben bereits festgestellt, dass Rückversicherungen ein wichtiges Werkzeug zur Verringerung des Risikos eines Versicherers darstellen. Deshalb werden wir uns in diesem letzten Kapitel damit befassen, wie wir die Art der Rückversicherung zu wählen haben, um die Risiken der Versicherung zu optimieren. Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit Rückversicherungen befassen, welche auf die Einzelschäden wirken, anstatt auf unseren Gesamtschaden. Jede Rückversicherung wird somit vor allem unsere Einzelschadenshöhen modifizieren, sowie, als Ausgleich für den Rückversicherer, die Prämienrate.

Wir setzen dabei stets voraus, dass die Rückversicherung die Einzelschäden nicht vergrößert, d.h. dass anstatt einem Schaden u stets ein modifizierter Schaden u_θ mit $0 \leq u_\theta \leq u$ entsteht. Als letzte allgemeine Voraussetzung nehmen wir an, dass die Prämienrate für die Rückversicherung kontinuierlich bezahlbar ist und der Rückversicherer im Schadensfall stets ohne Verzögerung seinen Anteil zahlt.

Der zugrundeliegende Schadensprozess wird dabei, genau wie in unserem Ruinmodell, ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_U sein. Als Optimierungskriterium werden wir unsere endliche Ruinwahrscheinlichkeit betrachten und versuchen diese bis zu einem festen Zeitpunkt x zu minimieren. Dabei ermöglichen wir es dem Versicherer die Art bzw. Höhe der Rückversicherung zu Beginn jeder Zeitperiode zu ändern. Somit hängt unsere optimale Strategie am Anfang jeder Zeiteinheit vom zur Verfügung stehenden Kapital des Versicherers, sowie der Restzeit bis zum Zeitpunkt x ab. Mathematisch bedeutet dies, dass wir ein diskretes, stochastisches Kontrollproblem behandeln, obwohl unser zugrundeliegende Überschussprozess ein stetiger Prozess ist. Zuletzt werden wir in diesem Kapitel einige Näherungsverfahren zur Berechnung der optimalen Strategie betrachten. Beginnen wir nun zunächst mit einigen grundlegenden Wiederholungen, bevor wir uns einigen Beispielen für Rückversicherungen widmen.

Wie bereits angemerkt betrachten wir als Schadensprozess erneut einen zusammengesetzten Poisson-Prozess $X(t)$ mit Charakteristiken λ und F_U . Dabei besitze die Verteilungsfunktion F_U eine Dichte und es gelte wie immer $F_U(0) = 0$. Ebenso stehen dem Versicherer zunächst eine freie Reserve u sowie eine konstante Prämienrate β zur Verfügung. Letztere erfülle erneut die Bedingung

$$\beta > \mathbb{E}(X_1) = \lambda \mathbb{E}(U). \quad (9.1)$$

Wir erinnern an dieser Stelle zudem an die Definitionen

$$R(t) := u + \beta t - X(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

sowie

$$S(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} U_i - \beta t = u - R(t)$$

des Risikoreserve - bzw. Schadensüberschussprozesses.

Wir werden ab sofort unsere Zeiteinheiten als Jahre betrachten, womit die Änderung der Rückversicherungsstrategie jährlich erfolgen kann. Soll dies monatlich oder innerhalb eines anderen Zeitintervalls geschehen, so müssen in allen folgenden Berechnungen lediglich β, λ und x für die neue Zeitperiode nach Folgerung 7.2 modifiziert werden.

Wir widmen uns nun zwei gängigen Rückversicherungsstrategien und werden für diese einige Berechnungen anstellen. Man unterscheidet Rückversicherungsverträge hauptsächlich in *proportionale* - und *nichtproportionale Rückversicherungen*. Bei der ersten Form werden die Prämie sowie Einzelschäden zu einem gewissen Satz vom Rückversicherer übernommen, während bei der nichtproportionalen Rückversicherung lediglich Schäden ab einer gewissen Höhe vom Rückversicherer übernommen werden. Wir werden nun für beide Fälle je eine spezielle Vertragsform näher betrachten.

Mit θ werden wir deshalb im Folgenden eine Rückversicherungsstrategie bezeichnen. Wie bereits angemerkt wirkt sich diese stets auf die Prämienrate sowie die Verteilung (und somit auch auf die Dichte) der Einzelschäden aus. Wir nennen deshalb β_θ die *Prämie des Versicherers nach Rückversicherung* und die Zufallsvariable U_θ die *Einzelschadenshöhe des Versicherers nach Rückversicherung*.

Für die Wahl der Prämienrate nach Rückversicherung stehen erneut vielerlei Methoden zur Verfügung, wir werden deshalb im Folgenden lediglich die Netto-Gewinn-Bedingung

$$\beta_\theta > \mathbb{E}(X_{\theta,1}) := \lambda \mathbb{E}(U_\theta) \quad (9.2)$$

voraussetzen.

Wir beginnen nun mit der einfachsten Form proportionaler Rückversicherungen und erinnern erneut daran, dass wir lediglich positive Schäden zulassen.

Satz 9.1 (Quotenrückversicherung). *Sei F_U eine Verteilungsfunktion mit Dichte f_U und $F_U(0) = 0$ und $q \in (0, 1]$. Dann bezeichnen wir die Rückversicherungsstrategie θ als Quotenrückversicherung (QRV) mit Quote q , falls*

$$U_\theta := qU \quad (9.3)$$

und somit

$$F_{U_\theta}(x) := F_U\left(\frac{x}{q}\right), \quad x \in \mathbb{R}_{>0} \quad (9.4)$$

gilt.

Sei nun θ eine QRV mit Quote $q \in (0, 1]$, so ist F_{U_θ} eine Verteilungsfunktion mit $F_{U_\theta}(0) = 0$ und sie besitzt überall die Dichte

$$f_{U_\theta}(x) = \frac{1}{q} f_U\left(\frac{x}{q}\right), \quad x \in \mathbb{R}_{>0} \quad (9.5)$$

sowie die momenterzeugende Funktion

$$M_{U_\theta}(s) = M_U(qs), \quad s \in \left(-\infty, \frac{s_U^+}{q}\right). \quad (9.6)$$

Falls $s_U^+ > 0$ gilt, existieren alle Momente von $F_{U,\theta}$ und es folgt insbesondere

$$\mathbb{E}(U_\theta) = q\mathbb{E}(U) \quad (9.7)$$

sowie

$$\text{Var}(U_\theta) = q^2\text{Var}(U). \quad (9.8)$$

Es gilt dann weiterhin

$$\mathbb{E}(U_\theta) \leq \mathbb{E}(U) \text{ sowie } \text{Var}(U_\theta) \leq \text{Var}(U). \quad (9.9)$$

Beweis. Sei θ eine QRV mit Quote $q \in (0, 1]$. Nach Voraussetzung gilt $F_U(0) = 0$ womit nach (9.4) direkt $F_{U_\theta}(0) = 0$ folgt.

Da F_U ebenfalls nach Voraussetzung eine Dichte f_U besitzt liefert (9.4) erneut für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f_{U_\theta}(x) = F'_{U_\theta}(x) = F'_U\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}f_U\left(\frac{x}{q}\right),$$

womit die Existenz der Dichte sowie (9.5) gezeigt wurden.

Die Formel für die momenterzeugende Funktion sowie der Momente folgt unweigerlich aus (9.3).

Wegen $q \in (0, 1]$ erkennen wir aus (9.7) bzw. (9.8), dass eine Quotenrückversicherung sowohl den Erwartungswert, als auch die Varianz verringert, womit (9.9) gilt. \square

Anmerkung: 1.) Der Versicherer zahlt bei einer Quotenrückversicherung also lediglich einen quotiellen Anteil q aller Schäden. Den restlichen Teil der Schäden übernimmt die Rückversicherung. Die Vorteile einer solchen Strategie liegen vor allem im geringen Verwaltungsaufwand sowie der Erhöhung der Solvabilitätslage des Versicherers. Dies bedeutet, dass er mit gleicher freien Reserve mehr Schäden abdecken und somit auch mehr Versicherungen verkaufen kann. Im Gegenzug handelt es sich im Allgemeinen allerdings um eine recht teure Rückversicherung, da die Prämie ebenfalls quotiell geteilt wird.

2.) Den Fall des *fronting's* ($q = 0$), bei dem der Erstversicherer das volle Risiko an die Rückversicherung weiterleitet, werden wir an dieser Stelle nicht betrachten. Aus mathematischer Sicht folgt in diesem Fall trivialerweise $\psi(u, x) = 0$ für alle $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für den Erstversicherer.

3.) Wir erkennen somit, dass unsere für die Formel von Seal benötigten Bedingungen nach einer Quotenrückversicherung erhalten bleiben. Zudem folgt aus (9.3) die Darstellung

$$F_{X_{t,\theta}}(x) = F_{X_t}\left(\frac{x}{q}\right), \quad x \in \mathbb{R}_{>0} \quad (9.10)$$

für die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens $X_{t,\theta} = \sum_{i=1}^{N_t} U_\theta$.

Betrachten wir nun die gängigste Form der nichtproportionalen Rückversicherungen.

Satz 9.2 (Schadenexzedentenrückversicherung). Sei F_U eine Verteilungsfunktion mit Dichte f_U und $F_U(0) = 0$ und $H, P \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann bezeichnen wir die Rückversicherungsstrategie θ als Schadenexzedentenrückversicherung (XL - aus engl. „excess of loss“) mit Priorität P und Haftstrecke H , falls

$$U_\theta := \min(U, P) + \max(U - (P + H), 0) = \begin{cases} U, & \text{wenn } U \leq P \\ P, & \text{wenn } P < U \leq P + H \\ U - H, & \text{wenn } U > P + H \end{cases} \quad (9.11)$$

erfüllt ist. Somit erhalten wir die Verteilungsfunktion von U_θ mit

$$F_{U_\theta}(x) = \begin{cases} F_U(x), & \text{wenn } x < P \\ F_U(x + H), & \text{wenn } x \geq P. \end{cases} \quad (9.12)$$

Sei nun θ eine XL mit Priorität $P \in \mathbb{R}_{>0}$ und Haftstrecke $H \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist F_{U_θ} eine Verteilungsfunktion mit $F_{U_\theta}(0) = 0$ und ist f.ü. differenzierbar mit

$$F'_{U_\theta}(x) := \tilde{f}_{U_\theta}(x) = \begin{cases} f_U(x), & \text{wenn } x < P \\ f_U(x + H), & \text{wenn } x > P. \end{cases} \quad (9.13)$$

Falls $s_U^+ > 0$ gilt, existieren alle Momente von $F_{U,\theta}$ und es folgt insbesondere

$$\mathbb{E}(U_\theta) = \mathbb{E}(U) - \int_P^{P+H} \bar{F}_U(x) dx \quad (9.14)$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_\theta) &= \text{Var}(U) + 2\mathbb{E}(U) \int_P^{P+H} \bar{F}_U(x) dx - \left(\int_P^{P+H} \bar{F}_U(x) dx \right)^2 \\ &\quad - 2 \int_P^{P+H} x \bar{F}_U(x) dx - 2H \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Es gilt dann weiterhin

$$\mathbb{E}(U_\theta) \leq \mathbb{E}(U) \text{ sowie } \text{Var}(U_\theta) \leq \text{Var}(U). \quad (9.16)$$

Beweis. Sei θ eine XL mit Priorität $P \in \mathbb{R}_{>0}$ und Haftstrecke $H \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen wir zunächst die Verteilungsfunktion von U_θ . Sei dazu $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt nach Definition (9.11)

$$\begin{aligned} F_{U_\theta}(x) &= \mathbb{P}(U_\theta \leq x, U \leq P) + \mathbb{P}(U_\theta \leq x, P < U \leq P + H) + \mathbb{P}(U_\theta \leq x, U > P + H) \\ &= \mathbb{P}(U \leq x, U \leq P) + \mathbb{P}(P \leq x, P < U \leq P + H) + \mathbb{P}(U - H \leq x, U > P + H) \\ &= F_U(x) \mathbb{1}_{[0,P)}(x) + F_U(P) \mathbb{1}_{[P,\infty)}(x) + (F_U(P + H) - F_U(P)) \mathbb{1}_{[P,\infty)}(x) \\ &\quad + (F_U(x + H) - F_U(P + H)) \mathbb{1}_{[P,\infty)}(x) \end{aligned}$$

$$= F_U(x) \mathbb{1}_{[0,P)}(x) + F_U(x+H) \mathbb{1}_{[P,\infty)}(x).$$

Somit wurde (9.12) gezeigt.

Nach Voraussetzung gilt $F_U(0) = 0$, womit nach (9.12) nun direkt $F_{U_\theta}(0) = 0$ wegen $P > 0$ folgt.

Da F_U ebenfalls nach Voraussetzung eine Dichte f_U besitzt, liefert (9.12) die Gleichung (9.13) durch direktes Nachrechnen.

Mithilfe der allgemeinen Formel

$$\mathbb{E}X^n = n \int_0^\infty x^{n-1} \overline{F}_X(x) dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.17)$$

für die Momente einer nichtnegativen Zufallsvariable $X \geq 0$ mit Schwanzfunktion \overline{F}_X liefert die Existenz der Momente von U , aufgrund der Abschätzung

$$\overline{F}_{U_\theta}(x) \leq \overline{F}_U(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

nach (9.12) sowie der Monotonie von \overline{F}_{U_θ} , die Existenz der Momente von U_θ . Wir erhalten somit insbesondere mittels (9.17)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_\theta) &= \int_0^\infty \overline{F}_{U_\theta}(x) dx = \int_0^P \overline{F}_U(x) dx + \int_P^\infty \overline{F}_U(x+H) dx \\ &= \int_0^P \overline{F}_U(x) dx + \int_{P+H}^\infty \overline{F}_U(x) dx = \mathbb{E}(U) - \int_P^{P+H} \overline{F}_U(x) dx \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_\theta^2) &= 2 \int_0^\infty x \overline{F}_{U_\theta}(x) dx = 2 \int_0^P x \overline{F}_U(x) dx + 2 \int_{P+H}^\infty (x-H) \overline{F}_U(x) dx \\ &= \mathbb{E}(U^2) - 2 \int_P^{P+H} x \overline{F}_U(x) dx - 2 \int_{P+H}^\infty H \overline{F}_U(x) dx \\ &= \text{Var}(U) + (\mathbb{E}(U))^2 - 2 \int_P^{P+H} x \overline{F}_U(x) dx - 2H \int_{P+H}^\infty \overline{F}_U(x) dx. \end{aligned}$$

Somit folgen (9.14) und (9.15) zusätzlich nach der Definition der Varianz.

Wir erkennen an (9.14) und der Nichtnegativität des auftretenden Integrals sofort, dass der Erwartungswert für beliebiges $P \in \mathbb{R}_{>0}$ und $H \in \mathbb{R}_{>0}$ kleiner wird. Es reicht also zu zeigen, dass dies ebenfalls für die Varianz zutrifft. Sei dazu nun $P \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig aber fest gewählt, so definieren wir für alle $H \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} Z(P, H) &:= 2\mathbb{E}(U) \int_P^{P+H} \overline{F}_U(x) dx - \left(\int_P^{P+H} \overline{F}_U(x) dx \right)^2 \\ &\quad - 2 \int_P^{P+H} x \overline{F}_U(x) dx - 2H \int_{P+H}^\infty \overline{F}_U(x) dx. \end{aligned}$$

Wir erkennen sofort, dass $Z(P, 0) = 0$ gilt. Partielle Ableitung nach H liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} Z(P, H) &= 2\mathbb{E}(U)\bar{F}_U(P+H) - 2\bar{F}(P+H) \left(\int_P^{P+H} \bar{F}_U(x) dx \right) \\ &\quad - 2(P+H)\bar{F}_U(P+H) - 2 \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx + 2H\bar{F}(P+H) \\ &= 2\bar{F}_U(P+H) \left[\mathbb{E}(U) - \int_P^{P+H} \bar{F}_U(x) dx - P \right] - 2 \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx \\ &= 2\bar{F}_U(P+H) \left[\int_0^P \bar{F}_U(x) dx + \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx - P \right] - 2 \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx. \end{aligned}$$

Wegen $\bar{F}_U(P+H) \geq 0$ und $\bar{F}_U(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} Z(P, H) &\leq 2\bar{F}_U(P+H) \left[P + \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx - P \right] - 2 \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx \\ &= -2(1 - \bar{F}_U(P+H)) \int_{P+H}^{\infty} \bar{F}_U(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Da dies für alle $H \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, ist $Z(P, H)$ monoton fallend mit Startwert 0 und somit gilt

$$Z(P, H) \leq 0, \quad P \in \mathbb{R}_{>0}, H \in \mathbb{R}_{>0},$$

womit (9.15) die Verringerung der Varianz und damit (9.16) liefert. Der Fall $H = \infty$ lässt sich analog mit

$$Z(P) := 2\mathbb{E}(U) \int_P^{\infty} \bar{F}_U(x) dx - \left(\int_P^{\infty} \bar{F}_U(x) dx \right)^2 - 2 \int_P^{\infty} x\bar{F}_U(x) dx$$

wegen $Z(0) = -\text{Var}(U) \leq 0$, $\lim_{P \rightarrow \infty} Z(P) = 0$ und $Z'(P) \geq 0$ zeigen. □

Anmerkung: 1.) Der Versicherer zahlt bei einer Schadenexzedentenrückversicherung somit alle Schäden bis zur Prioritätsgrenze vollständig. Ab dieser übernimmt der Rückversicherer alle überschüssigen Schäden bis zu einer von ihm festgelegten Haftstrecke. Übersteigen die Schäden die Summe von Priorität und Haftstrecke, so trägt erneut der Erstversicherer die Überschüsse, so dass der maximal zu zahlende Betrag des Rückversicherers durch die Haftstrecke begrenzt ist. Solche Rückversicherungen eignen sich also bestens zum Schutz vor einzelnen Großschäden und sind meist billiger als entsprechende Quotenrückversicherungen. Sie sind allerdings mit einem größerem Arbeitsaufwand verbunden, da alle einzelnen Schäden geprüft werden müssen.

2.) Wir werden im Folgenden ebenfalls $H = \infty$ zulassen, was zur Folge hat, dass der Rückversicherer alle Schäden ab Priorität P übernimmt und die Einzelschäden des Erstversicherers somit auf P beschränkt sind. Wir führen deshalb noch die Kurzschreibweise

$$\bar{\mathbb{R}}_{>0} := \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$$

für die abgeschlossene Menge der positiven reellen Zahlen ein. Gelte nun zusätzlich zu $H = \infty$ noch $P = 0$, so gelangen wir erneut zum Fall des *fronting's*, welcher in der Anmerkung zur Quotenrückversicherung bereits betrachtet wurde. Für die Fälle $H = 0$ bzw. $P \rightarrow \infty$ liegt offensichtlich keinerlei Rückversicherung vor und der Schadensprozess bleibt unverändert.

3.) Im Gegensatz zur Quotenrückversicherung ist es nicht möglich eine einfache geschlossene Form für die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens nach Rückversicherung anzugeben, was in den meisten Fällen lediglich eine numerische Berechnung bzw. Approximation zulässt. Zudem existiert aufgrund des Sprunges der Verteilungsfunktion nach XL an der Stelle P unsere Einzelschadensdichte nach Rückversicherung lediglich fast überall. Dies hat zur Folge, dass nicht alle Bedingungen von Seals Formeln erfüllt sind und wir auf den Fall für Verteilungen ohne Dichten ausweichen müssen.

Als letzte vorbereitende Maßnahme werden wir nun noch unsere beiden Rückversicherungsstrategien am Beispiel von exponentialverteilten Einzelschäden begutachten. Wir fassen dazu lediglich die Momente nach den jeweiligen Rückversicherungen zusammen, da wir diese später für weitere Approximationen benötigen werden und beschränken uns zudem auf den Fall $H = \infty$ für unsere Schadenexzedentenrückversicherung.

Satz 9.3. *Seien $U \sim \text{Exp}(\mu)$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie θ_1 eine QRV mit Quote $q \in (0, 1]$ sowie θ_2 eine XL mit Priorität $P \in \mathbb{R}_{>0}$ und Haftstrecke $H = \infty$. Dann existieren alle Momente von U_{θ_1} sowie U_{θ_2} und es gilt insbesondere*

$$\mathbb{E}(U_{\theta_1}) = \frac{q}{\mu} \text{ sowie } \text{Var}(U_{\theta_1}) = \frac{q^2}{\mu^2} \quad (9.18)$$

und

$$\mathbb{E}(U_{\theta_2}) = \frac{1}{\mu} [1 - e^{-\mu P}] \text{ sowie } \text{Var}(U_{\theta_2}) = \frac{1}{\mu^2} [1 - e^{-2\mu P}] - \frac{2}{\mu} P e^{-\mu P}. \quad (9.19)$$

Beweis. Für die QRV ergeben sich die Momente direkt aus (2.57) bzw. (2.58) und (9.7) bzw. (9.8).

Analog erhalten wir die Momente der XL ebenfalls aus (2.57) bzw. (2.58) mittels (9.14) bzw. (9.15) und zusätzlich

$$\int_P^\infty e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} e^{-\mu P}$$

sowie

$$\int_P^\infty x e^{-\mu x} dx = \left[\frac{P}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right] e^{-\mu P}.$$

□

Wir haben somit zwei der grundlegendsten Rückversicherungsstrategien betrachtet und gezeigt, dass lediglich die Quotenrückversicherung unsere Bedingungen zur Anwendung von Satz 7.1 (Seal) erfüllt. Bereits im Falle von Schadenexzedentenrückversicherungen

müssten wir auf Satz 7.4 ausweichen. Um dies vorerst zu umgehen, wollen wir im Folgenden beliebige Rückversicherungsstrategien θ als *zulässig* bezeichnen, falls sich der Gesamtschadensprozess $X_\theta(t)$ nach Anwendung dieser immer noch als zusammengesetzter Poisson-Prozess mit existenter Einzelschadensdichte f_{U_θ} darstellen lässt. Zudem erinnern wir daran, dass jede zulässige Strategie ebenfalls unsere Netto-Gewinn-Bedingung (9.2) erfüllt. Zuletzt sei erwähnt, dass bei praktischen Anwendungen der nachfolgenden Ergebnisse meist weitere Restriktionen für die Menge an zulässigen Strategien sinnvoll sind (z.B. Strategien, welche den selben erwarteten Gewinn > 0 erzielen).

Widmen wir uns nach diesen Vorbetrachtungen den Auswirkungen von zulässigen Rückversicherungen auf die Ruinwahrscheinlichkeit des Erstversicherers. Wir betrachten somit, falls nicht explizit anders erwähnt, ab sofort ausschließlich zulässige Rückversicherungsstrategien θ .

Wie bereits in der Einleitung zum Kapitel angemerkt, kann der Versicherer zu Beginn jeden Jahres sowohl Art als auch Höhe seiner Versicherungsstrategie ändern. Mit θ_j bezeichnen wir dazu nun, für $j = 1, 2, \dots$, die Rückversicherungsstrategie des j -ten Jahres, also vom Zeitpunkt $j - 1$ bis j . Wir werden den Index j weglassen, falls das Jahr keinerlei Rolle spielt. Zudem werden wir die Symbolik $\theta := (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ ebenfalls für eine allgemeine Strategie über mehrere Jahre, mit veränderlichen Jahresstrategien θ_i , verwenden. Wir bezeichnen dabei eine allgemeine Strategie θ als zulässig, falls all ihre Einzeljahresstrategien θ_i zulässig sind.

Bezeichne $R_\theta(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Risikoreserveprozess nach den Rückversicherungsstrategien $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, sowie $R_{\theta,n}$ die entsprechenden Zufallsvariablen des Prozesses. So gilt zum einen $R_{\theta,0} = u$ sowie rekursiv für $t \in [0, 1)$

$$R_{\theta_{n+1},n+t} = R_{\theta,n} + \beta_{\theta_{n+1}}t - X_{\theta_{n+1},t}. \quad (9.20)$$

Dabei bezeichne β_{θ_j} die Prämienrate im Jahr j nach Rückversicherung, sowie $X_{\theta_{j+1},t}$ die Gesamtschadenshöhe im Zeitraum $[j, j + t)$ nach Rückversicherung. Nach unseren Voraussetzungen ist letztere zusammengesetzt Poisson-verteilt mit modifizierten Charakteristiken λ und $F_{U_{\theta_j}}$, wobei die Einzelschadensverteilung $F_{U_{\theta_j}}$ eine Dichte $f_{U_{\theta_j}}$ besitzt. Zudem werden wir für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Kurzschreibweise

$$\beta_\theta t := \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \beta_{\theta_j} + \beta_{\theta_{\lceil t \rceil}}t \quad (9.21)$$

für das Einkommen unserer Prämienrate über einen Zeitraum t verwenden.

Für ein gewisses θ definieren wir dann zudem für $t \in [0, 1)$ und $x \in \mathbb{R}$ die Verteilung

$$G_\theta(x, t) := \mathbb{P}(X_{\theta,t} \leq x) = F_{X_{\theta,t}}(x) \quad (9.22)$$

von $X_{\theta,t}$. Die Existenz der Dichte f_{U_θ} liefert somit die f.ü. Existenz der partiellen Ableitung

$$g_\theta(x, t) := \frac{\partial}{\partial x} G_\theta(x, t) \quad (9.23)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ (Vergleich \tilde{f}_{X_t} in (3.14)).

Bezeichne nun $\psi_\theta(u, x)$ für $u, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ruinwahrscheinlichkeit mit Startkapital u bis zum Zeitpunkt x , nach Anwendung der Rückversicherungsstrategien $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ mit $n := \lceil x \rceil$. Sei zudem $\hat{\psi}(u, x)$ das Minimum von $\psi_\theta(u, x)$ über alle zulässigen θ .

Wir sind nun in der Lage $\hat{\psi}(u, x)$ rekursiv zu bestimmen. Wir wählen dafür speziell $x = n \in \mathbb{N}$ und betrachten somit die Wahrscheinlichkeit für Ruin in kontinuierlicher Zeit, innerhalb der ersten n Jahre und mit Hilfe eines Startkapitals u .

Für unsere rekursiven Berechnungen werden wir zwei neue Größen benötigen, welche wir zuerst definieren und anschließend mit Hilfe unserer Funktion g_θ , für die für uns relevanten Werte, darstellen werden.

Definition 9.4. Sei θ eine zulässige Strategie, so bezeichne für alle $u, t, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\Delta_\theta(u, t, y) := \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{0 \leq s \leq t} \{R_{\theta, s} \geq 0\} \right) \cap (R_t > y) \right) \quad (9.24)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass mit Hilfe eines Startkapitals u kein Ruin im Zeitraum $[0, t]$ eintritt und der Überschuss zum Zeitpunkt t größer als y ist. Weiterhin definieren wir die Größe

$$\delta_\theta(u, t, y) := -\frac{d}{dy} \Delta_\theta(u, t, y). \quad (9.25)$$

Diese existiert f.ü., da $\Delta_\theta(u, t, y)$ bzgl. y eine monoton fallende Funktion ist.

Es gelten nun folgende grundlegende Eigenschaften dieser beiden Funktionen.

Satz 9.5. Seien für alle $u, t, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktionen Δ_θ und δ_θ wie in Definition 9.4 gegeben, so gilt für alle $u, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\Delta_\theta(u, t, 0) = \bar{\psi}(u, t) \quad (9.26)$$

sowie

$$\Delta_\theta(u, t, y) = 0, \quad y \geq u + \beta_\theta t \quad (9.27)$$

und

$$\lim_{y \uparrow u + \beta_\theta t} \Delta_\theta(u, t, y) = e^{-\lambda t} \text{ bzw. } \lim_{t \downarrow y / \beta_\theta} \Delta_\theta(0, t, y) = e^{-\lambda y / \beta_\theta}. \quad (9.28)$$

Zudem existiert $\delta_\theta(u, t, y)$ nicht an der Stelle $y_0 := u + \beta_\theta t$, allerdings erhalten wir für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq b < u + \beta_\theta t$

$$\int_a^b \delta_\theta(u, t, y) dy = \Delta_\theta(u, t, a) - \Delta_\theta(u, t, b) \quad (9.29)$$

und zudem für den Grenzfall $a = 0$ und $b = u + \beta_\theta t$

$$\int_0^{u + \beta_\theta t} \delta_\theta(u, t, y) dy = \bar{\psi}(u, t) - e^{-\lambda t}. \quad (9.30)$$

Es gilt weiterhin für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $y \in [0, \beta_\theta t)$

$$\delta_\theta(0, t, y) = \frac{y}{\beta_\theta t} g_\theta(\beta_\theta t - y, t). \quad (9.31)$$

Zuletzt ist für alle $u, t \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $y \in [0, \beta_\theta t)$ die Gleichung

$$\Delta_\theta(u, t, y) = G_\theta(u + \beta_\theta t - y, t) - \beta_\theta \int_0^{t-y/\beta_\theta} \Delta_\theta(0, t-s, y) g_\theta(u + \beta_\theta s, s) ds \quad (9.32)$$

erfüllt.

Beweis. Da $G_\theta(x, t)$ für alle t nach unseren Voraussetzungen stetig außer an der Stelle $x_0 = 0$ ist, folgt insbesondere die Stetigkeit von $H_\theta(x, t) := G_\theta(u + \beta_\theta t - x, t)$ an allen Stellen außer $x = u + \beta_\theta t$. Nach Definition des Risikoreserveprozesses, gilt

$$H_\theta(x, t) = \mathbb{P}(X_{\theta,t} \leq u + \beta_\theta t - x) = \mathbb{P}(R_{\theta,t} \geq x).$$

Nach diesen Vorüberlegungen erhalten wir insbesondere

$$\mathbb{P}(R_{\theta,t} > 0) = \mathbb{P}(R_{\theta,t} \geq 0),$$

womit Gleichung (9.26) direkt aus der Notwendigkeit von $R_{\theta,t} \geq 0$ für Überleben folgt. Die Gleichungen (9.27) und (9.28) folgen nach kurzen Überlegungen, da $u + \beta_\theta t$ dem maximal möglichen Kapital nach t Zeiteinheiten entspricht und dies gleichbedeutend zu $N_t = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\lambda t}$ ist.

Letztere beiden Gleichungen liefern zudem, dass $\Delta_\theta(u, t, y)$ einen Sprung an der Stelle $y_0 = u + \beta_\theta t$ besitzt, was die Nichtexistenz der Ableitung impliziert. Gleichung (9.29) folgt dann unweigerlich aus der Definition (9.25) von δ_θ .

Mittels Grenzwertbetrachtung erhalten wir wegen (9.26), (9.28) und (9.29)

$$\begin{aligned} \int_0^{u+\beta_\theta t} \delta_\theta(u, t, y) dy &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^{u+\beta_\theta t - \epsilon} \delta_\theta(u, t, y) dy \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} (\Delta_\theta(u, t, 0) - \Delta_\theta(u, t, u + \beta_\theta t - \epsilon)) \\ &= \bar{\psi}(u, t) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Delta_\theta(u, t, u + \beta_\theta t - \epsilon) \\ &= \bar{\psi}(u, t) - e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

womit (9.30) gezeigt ist.

Für die letzten beiden Gleichungen werden wir lediglich eine Beweisskizze angeben. Sei dazu zunächst $I := [y, y + dy)$ das infinitesimale Intervall um y , so gilt nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, sowie dem Satz von Takács

$$\delta_\theta(0, t, y) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq s < t} \{R_s \geq 0\}, R_t \in I \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq s \leq t} \{R_s \geq 0\} \mid R_t \in I \right) \mathbb{P}(R_t \in I) \\
&= \frac{y}{\beta_\theta t} \mathbb{P}(R_t \in I) = \frac{y}{\beta_\theta t} g_\theta(\beta_\theta t - y, t).
\end{aligned}$$

Gleichung (9.32) folgt mittels analogen Überlegungen zur zweiten Formel von Seal. Um bis zum Zeitpunkt t mit Startkapital u und einem Endkapital größer y zu überleben, muss $R_t > y$ gelten. Diese notwendige Bedingung wird im ersten Term beschrieben. Es kann aber nun trotz $R_t > y$ zu Ruin im Zeitraum $[0, t]$ gekommen sein. Dann existiert allerdings ein letzter Zeitpunkt s für den $R_s = 0$ erfüllt ist, ab dem kein weiterer Ruin eintrat und $R_t > y$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit dafür entspricht dem Integranden des zweiten Terms. Zuletzt lässt sich das Integrationsgebiet nach (9.27) wegen

$$\Delta_\theta(0, t - s, y) = 0, \quad s \geq t - \frac{y}{\beta_\theta},$$

weiter einschränken, womit Gleichung (9.32) gilt. \square

Anmerkung: 1.) Integrieren wir (9.31) über alle y , so folgt nach wenigen Umformungen und partieller Integration, aufgrund der Definitionen der Größen sowie (9.30) unsere erste Formel von Seal (7.2).

2.) Es lässt sich ebenfalls erkennen, dass für $y = 0$ Gleichung (9.32) in unsere zweite Formel von Seal (7.3) übergeht.

Nach Betrachtung dieser Eigenschaften, wollen wir nun die, für unsere Berechnungen relevanten, Größen mithilfe von g_θ darstellen. Folgender Satz beinhaltet somit die erste notwendige Formel zur Berechnung unserer optimalen Rückversicherungsstrategie.

Satz 9.6. Sei für alle $u, t, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Funktion δ_θ wie in Definition 9.4 gegeben, so erhalten wir für alle $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $y \in [0, \beta_\theta)$

$$\begin{aligned}
\delta_\theta(u, 1, y) &= g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1) - g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1 - y/\beta_\theta) e^{-\lambda y/\beta_\theta} \\
&\quad - y \int_0^{1-y/\beta_\theta} \frac{1}{1-s} g_\theta(\beta_\theta(1-s) - y, 1-s) g_\theta(u + \beta_\theta s, s) ds. \quad (9.33)
\end{aligned}$$

Beweis. Leiten wir Gleichung (9.32) aus Satz 9.5 für $t = 1$ nach y ab, so erhalten wir mittels Definition (9.25) sowie (9.28) und (9.31)

$$\begin{aligned}
\delta_\theta(u, 1, y) &= -\frac{d}{dy} \Delta_\theta(u, 1, y) \\
&= g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1) + \beta_\theta \left(-\frac{1}{\beta_\theta}\right) \lim_{s \uparrow 1-y/\beta_\theta} g_\theta(u + \beta_\theta s, s) \Delta_\theta(0, 1 - s, y) \\
&\quad + \beta_\theta \int_0^{1-y/\beta_\theta} (-\delta_\theta(0, 1 - s, y)) g_\theta(u + \beta_\theta s, s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1) - g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1 - y/\beta_\theta) \lim_{1-s \downarrow y/\beta_\theta} \Delta_\theta(0, 1 - s, y) \\
&\quad - y \int_0^{1-y/\beta_\theta} \frac{1}{1-s} g_\theta(\beta_\theta(1-s) - y, 1-s) g_\theta(u + \beta_\theta s, s) ds \\
&= g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1) - g_\theta(u + \beta_\theta - y, 1 - y/\beta_\theta) e^{-\lambda y/\beta_\theta} \\
&\quad - y \int_0^{1-y/\beta_\theta} \frac{1}{1-s} g_\theta(\beta_\theta(1-s) - y, 1-s) g_\theta(u + \beta_\theta s, s) ds.
\end{aligned}$$

Dies entspricht Formel (9.33), womit der Satz bewiesen ist. \square

Anmerkung: 1.) Wir haben die Voraussetzung $y < \beta_\theta$ schon in Voraussicht auf weitere Berechnungen gestellt, da wir nur für diesen Fall $\delta_\theta(u, 1, y)$ benötigen werden. Betrachten wir zudem die Integrationsgrenzen des Integrals in (9.33), so verschwindet das Integral im Grenzfall $y = \beta_\theta$, womit die Voraussetzung zusätzlich sinnvoll ist. Außerdem bemerken wir, dass für $y = 0$ der hintere Term komplett verschwindet und für $y \in (0, \beta_\theta)$ der Integrand keine Unstetigkeitsstellen aufweist.

2.) Da wir speziell $t = 1$ gewählt haben, hängen alle auftretenden Größen in (9.33) lediglich von unserer ersten Rückversicherungsstrategie θ_1 ab, weswegen wir alle darin auftretenden θ durch θ_1 ersetzen könnten.

Mithilfe der Funktionen δ_θ sowie G_θ und g_θ sind wir nun in der Lage unsere optimale Ruinwahrscheinlichkeit $\hat{\psi}(u, n)$ rekursiv zu berechnen.

Satz 9.7. *Seien im Folgenden $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig gewählt. Zudem bezeichnen $\bar{\psi}_\theta(u, n)$ bzw. $\psi_\theta(u, n)$ die Überlebens- bzw. Ruinwahrscheinlichkeit nach Rückversicherungsstrategie θ .*

Es gilt für alle zulässigen Strategien θ und $t \in (0, 1]$

$$\bar{\psi}_\theta(0, t) = \frac{1}{\beta_\theta t} \int_0^{\beta_\theta t} G_\theta(y, t) dy. \quad (9.34)$$

Mittels obiger Gleichung gilt nun für alle zulässigen Strategien θ im Falle $u \in \mathbb{R}_{> 0}$

$$\bar{\psi}_\theta(u, 1) = G_\theta(u + \beta_\theta, 1) - \beta_\theta \int_0^1 \bar{\psi}(0, 1 - y) g_\theta(u + \beta_\theta y, y) dy. \quad (9.35)$$

Im Fall $n > 1$ erhalten wir nun rekursiv mit $\theta \setminus \theta_1 := (\theta_2, \dots, \theta_n)$

$$\begin{aligned}
\psi_\theta(u, n) &= \psi_{\theta_1}(u, 1) + e^{-\lambda} \psi_{\theta \setminus \theta_1}(u + \beta_{\theta_1}, n - 1) \\
&\quad + \int_0^{\beta_{\theta_1}} \delta_{\theta_1}(u, 1, y) \psi_{\theta \setminus \theta_1}(y, n - 1) dy \\
&\quad + \int_{\beta_{\theta_1}}^{u + \beta_{\theta_1}} g_{\theta_1}(u + \beta_{\theta_1} - y, 1) \psi_{\theta \setminus \theta_1}(y, n - 1) dy.
\end{aligned} \quad (9.36)$$

Somit gilt für unsere optimale Strategie

$$\hat{\psi}(u, n) = \inf_{\theta} \psi_{\theta}(u, n). \quad (9.37)$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist θ eine zulässige Strategie, womit $X_{\theta}(t)$ einem zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und $F_{U_{\theta}}$ entspricht. Zudem galt dann $F_{U_{\theta}}(0) = 0$ und $F_{U_{\theta}}$ besaß eine Dichte $f_{U_{\theta}}$. Somit können wir die Formeln von Seal anwenden und (9.34) bzw. (9.35) entsprechen (7.2) bzw. (7.3).

Widmen wir uns nun (9.36). Wir werden erneut lediglich eine Beweisskizze angeben. Sei dazu nun $n > 1$ und eine passende Mehrjahresstrategie $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ gegeben. Wir können zunächst nach unserem Ruinzeitpunkt bedingen und festlegen, ob dieser innerhalb des ersten Jahres liegt oder nicht. Wir erhalten somit

$$\psi_{\theta}(u, n) = \psi_{\theta}(u, 1) + H(\theta)$$

für eine Funktion H . Intuitiv entspricht $H(\theta)$ der Wahrscheinlichkeit von Ruin innerhalb der Jahre $2, \dots, n$ über alle nach Jahr 1 möglichen Startkapitale $y \in [0, u + \beta_{\theta_1}]$, wobei kein Ruin im Jahr 1 eintrat und die Strategien $\theta \setminus \theta_1$ verwendet wurden. Bedingen wir nach den möglichen Startkapitalen y , so entstehen drei interessante Fälle.

- 1.) $y = u + \beta_{\theta}$: In diesem Fall trat kein Schaden bis zum Zeitpunkt 1 ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür entspricht $e^{-\lambda}$.
- 2.) $y \in [0, \beta_{\theta_1})$: Da für diesen Fall Ruin bis zum Zeitpunkt 1 möglich wäre, müssen wir dies mittels der Dichte $\delta_{\theta}(u, 1, y)$ ausschließen.
- 3.) $y \in [\beta_{\theta_1}, u + \beta_{\theta_1})$: Hier ist kein Ruin bis zum Zeitpunkt 1 möglich, womit lediglich $X_1 = u + \beta_{\theta} - y$ gefordert wird. Die entsprechende Dichte dafür ist nach unseren Definitionen $g_{\theta}(u + \beta_{\theta} - y, 1)$.

Integrieren wir nun über alle möglichen Werte von y und beachten, dass in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit von Ruin in den Jahren $2, \dots, n$ mit Startkapitel y der Wahrscheinlichkeit $\psi_{\theta \setminus \theta_1}(y, n - 1)$ entspricht, so erhalten wir für $H(\theta)$ die hinteren drei Terme in (9.36). Beachten wir zuletzt noch, dass

$$\psi_{\theta}(u, 1) = \psi_{\theta_1}(u, 1)$$

gilt, so folgt (9.36).

Zuletzt gilt (9.37) direkt aufgrund der Definition von $\hat{\psi}(u, n)$. □

Anmerkung: 1.) Numerische Probleme treten vor allem bei der Berechnung von G_{θ} bzw. g_{θ} auf. Beide lassen sich zwar mittels Panjer-Algorithmus errechnen, allerdings wird dies für große Werte von λ (also einer hohen Zahl erwarteter Schäden pro Jahr) unpraktikabel.

2.) Da sich die ersten beiden Formeln lediglich auf einem Zeitraum $t \in (0, 1]$ beziehen, ist es erneut möglich alle darin vorkommenden θ durch θ_1 zu ersetzen.

Wir haben für alle bisherigen Berechnungen die Existenz einer Einzelschadensdichte f_{U_θ} vorausgesetzt, allerdings ebenfalls gezeigt, dass dies selbst für einige grundlegende Rückversicherungsstrategien nicht gültig ist. Für diesen Fall könnte man Gleichungen wie (9.35) durch die allgemeinere Formel von Seal (siehe Satz 7.4) ersetzen und zudem „Sprungterme“ in (9.36) hinzufügen. Die numerische Einbindung dieser Fälle wäre somit mit einem enormen Aufwand verbunden und daher ebenfalls unpraktikabel. Wir haben also zusätzlich mit Anmerkung 1.) zwei gute Gründe für ein Approximationsverfahren aufgezeigt und wollen deshalb zum Abschluss dieser Arbeit ein solches Verfahren angeben.

Wir werden im Folgenden für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ unsere Gesamtschadensverteilung $G_\theta(\cdot, t)$, sowie deren Dichte $g_\theta(\cdot, t)$ durch die Verteilungsfunktion bzw. Dichte einer Gammaverteilung mit Parametern pt und b ersetzen. Da wir die Gammaverteilung bisher noch nicht explizit behandelt haben, werden wir dies an dieser Stelle nachholen.

Satz 9.8. *Sei X eine stetige Zufallsvariable sowie $p, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir bezeichnen X als gammaverteilte Zufallsvariable mit Parametern p, b (kurz $X \sim \gamma(p, b)$), falls*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (9.38)$$

die Dichte der Verteilungsfunktion von X ist. Hierbei bezeichnet Γ die Gammafunktion. Sei nun $X \sim \gamma(p, b)$ mit Parametern $p, b \in \mathbb{R}_{>0}$, dann ist

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{b^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-by} dy, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (9.39)$$

die Verteilungsfunktion von X und es gilt für alle $s \in (-\infty, b)$

$$M_X(s) = \left(\frac{b}{b-s} \right)^p \quad (9.40)$$

Somit existieren alle Momente der Verteilung und es gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{b}, \quad (9.41)$$

sowie

$$\text{Var}(X) = \frac{p}{b^2}. \quad (9.42)$$

Beweis. Wir zeigen lediglich die momenterzeugende Funktion, da alle anderen Aussagen direkt aus der Definition oder mit analogen Überlegungen zum Beweis von Satz 2.21 folgen. Sei also $s < b$, so gilt nach Definition der Gammafunktion

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-(b-s)x} dx = \frac{1}{b-s} \int_0^\infty \left(\frac{t}{b-s} \right)^{p-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p)}{(b-s)^p}.$$

Wir erhalten also für alle $s < b$

$$M_X(s) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-(b-s)x} dx = \left(\frac{b}{b-s} \right)^p.$$

□

Anmerkung: Wie bereits am Ende von Kapitel 2 angedeutet, verallgemeinert die Gammaverteilung die Erlang-Verteilung. Dies wird ersichtlich, da $\Gamma(p) = (p-1)!$ für $p \in \mathbb{N}$ gilt. Zudem haben wir somit einen alternativen Beweis für die momenterzeugende Funktion einer Erlang-Verteilung gezeigt.

Wir sind nun in der Lage unsere Approximation der optimalen Strategie mittels Gammaverteilung anzugeben.

Wir wählen dazu für jede Strategie θ unsere Parameter $b_\theta, p_\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass die ersten beiden Momente der Gammaverteilung $\gamma(p_\theta, b_\theta)$ mit den ersten beiden Momenten unseres Gesamtschadens X_1 zum Zeitpunkt 1 übereinstimmt.

Satz 9.9. *Seien θ eine Rückversicherungsstrategie und $X_\theta(t)$ ein zus. Poisson-Prozess mit Charakteristiken λ und F_{U_θ} . Zudem sei $X \sim \gamma(p_\theta, b_\theta)$ mit*

$$p_\theta = \frac{\lambda(\mathbb{E}U_\theta)^2}{\lambda\text{Var}U_\theta + (\mathbb{E}U_\theta)^2} \text{ sowie } b_\theta = \frac{\mathbb{E}U_\theta}{\lambda\text{Var}U_\theta + (\mathbb{E}U_\theta)^2}. \quad (9.43)$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_{\theta,1} \text{ sowie } \text{Var}X = \text{Var}X_{\theta,1}.$$

Beweis. Es gilt nach den Voraussetzungen (9.43) mittels (3.11), (3.12), (9.41) sowie (9.42)

$$\mathbb{E}X = \frac{p_\theta}{b_\theta} = \lambda\mathbb{E}U_\theta = \mathbb{E}X_{\theta,1}$$

und

$$\text{Var}X = \frac{p_\theta}{(b_\theta)^2} = \lambda(\text{Var}U_\theta + (\mathbb{E}U_\theta)^2) = \lambda\mathbb{E}U_\theta^2 = \text{Var}X_{\theta,1}.$$

□

Wählen wir unsere Parameter nun wie in Satz 9.9, dann bezeichnen wir ab sofort für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $G_{G_\theta}(\cdot, t)$ bzw. $g_{G_\theta}(\cdot, t)$ die Verteilungsfunktion bzw. Dichte einer Gammaverteilung mit Parametern $p_\theta t$ und b_θ . Diese beiden Funktionen stellen zulässige Näherungen für $G_\theta(\cdot, t)$ bzw. $g_\theta(\cdot, t)$ dar.

Da unsere näherungsweise Gesamtschadensverteilung G_{G_θ} lediglich die Existenz der ersten beiden Momente der Einzelschadensverteilung U_θ voraussetzt, können wir diese ebenfalls für Strategien ohne existente Einzelschadensdichte nutzen. Seien dazu ab sofort alle Strategien θ zulässig, für die $\mathbb{E}U_\theta < \infty$ sowie $\text{Var}U_\theta < \infty$ gilt.

Wir bemerken zuletzt noch an, dass diese Näherung ebenfalls numerische Vorteile mit

sich bringt, da zum einen auf den Panjer-Algorithmus verzichtet werden kann und sich zum anderen einige Formeln vereinfachen lassen. Dies wollen wir zum Abschluss dieser Arbeit noch demonstrieren und fassen deshalb unsere Ergebnisse aus den Sätzen 9.6 und 9.7 für unsere Näherung zusammen.

Satz 9.10. *Seien im Folgenden $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig gewählt. Dann gelten näherungsweise für alle zulässigen Strategien $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ folgende Formeln. Für alle $y \in [0, \beta_{\theta_1})$ erhalten wir*

$$\begin{aligned} \delta_\theta(u, 1, y) &\approx g_{G_{\theta_1}}(u + \beta_{\theta_1} - y, 1) - g_{G_{\theta_1}}(u + \beta_{\theta_1} - y, 1 - y/\beta_{\theta_1})e^{-\lambda y/\beta_{\theta_1}} \\ &\quad - y \int_0^{1-y/\beta_{\theta_1}} \frac{1}{1-s} g_{G_{\theta_1}}(\beta_{\theta_1}(1-s) - y, 1-s) g_{G_{\theta_1}}(u + \beta_{\theta_1}s, s) ds. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Weiterhin gilt für alle $t \in (0, 1]$

$$\bar{\psi}_\theta(0, t) \approx G_{G_{\theta_1}}(\beta_{\theta_1}t, t) - \frac{p_{\theta_1}}{\beta_{\theta_1}b_{\theta_1}} \hat{G}_{G_{\theta_1}}(\beta_{\theta_1}t, t), \quad (9.45)$$

wobei $\hat{G}_{G_{\theta_1}}$ die Verteilungsfunktion einer Gammaverteilung mit Parametern $p_{\theta_1}t + 1$ und b_{θ_1} bezeichnet.

Im Falle $u \in \mathbb{R}_{> 0}$ erhalten wir dann mithilfe obiger Formel

$$\bar{\psi}_\theta(u, 1) \approx G_{G_{\theta_1}}(u + \beta_{\theta_1}, 1) - \beta_{\theta_1} \int_0^1 \bar{\psi}(0, 1-y) g_{G_{\theta_1}}(u + \beta_{\theta_1}y, y) dy. \quad (9.46)$$

Im Fall $n > 1$ erhalten wir nun rekursiv mit $\theta \setminus \theta_1 := (\theta_2, \dots, \theta_n)$

$$\begin{aligned} \psi_\theta(u, n) &\approx \psi_{\theta_1}(u, 1) + e^{-\lambda} \psi_{\theta \setminus \theta_1}(u + \beta_{\theta_1}, n-1) \\ &\quad + \int_0^{\beta_{\theta_1}} \delta_{\theta_1}(u, 1, y) \psi_{\theta \setminus \theta_1}(y, n-1) dy \\ &\quad + \int_{\beta_{\theta_1}}^{u+\beta_{\theta_1}} g_{G_{\theta_1}}(u + \beta_{\theta_1} - y, 1) \psi_{\theta \setminus \theta_1}(y, n-1) dy. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Somit gilt für unsere optimale Strategie erneut

$$\hat{\psi}(u, n) = \inf_{\theta} \psi_\theta(u, n). \quad (9.48)$$

Beweis. Nach unseren Vorbemerkungen sind $G_{G_\theta}(\cdot, t)$ bzw. $g_{G_\theta}(\cdot, t)$ zulässige Näherungen für $G_\theta(\cdot, t)$ und $g_\theta(\cdot, t)$. Somit folgen die Gleichungen (9.44), (9.46), (9.47) und (9.48) direkt aus (9.33), (9.35), (9.36) und (9.37). Lediglich die Approximation von Formel (9.34) wurde zu numerischen Zwecken weiter vereinfacht, was wir an dieser Stelle noch zeigen möchten.

Sei $\hat{G}_{G_{\theta_1}}(\cdot, t)$ die Verteilungsfunktion einer Gammaverteilung mit Parametern $p_{\theta_1}t + 1$

und b_{θ_1} . So gilt nach (9.34) sowie (9.38), mittels unserer Näherung und partieller Integration,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{\theta}(0, t) &\approx \frac{1}{\beta_{\theta_1} t} \int_0^{\beta_{\theta_1} t} G_{G\theta_1}(y, t) dy \\
&= \frac{1}{\beta_{\theta_1} t} [y G_{G\theta_1}(y, t)]_0^{\beta_{\theta_1} t} - \frac{1}{\beta_{\theta_1} t} \int_0^{\beta_{\theta_1} t} y g_{G\theta_1}(y, t) dy \\
&= G_{G\theta_1}(\beta_{\theta_1} t, t) - \frac{1}{\beta_{\theta_1} t} \int_0^{\beta_{\theta_1} t} \frac{b^{p_{\theta_1} t}}{\Gamma(p_{\theta_1} t)} y^{p_{\theta_1} t} e^{-b_{\theta_1} y} dy \\
&= G_{G\theta_1}(\beta_{\theta_1} t, t) - \frac{p_{\theta_1} t}{\beta_{\theta_1} b_{\theta_1} t} \int_0^{\beta_{\theta_1} t} \frac{b^{p_{\theta_1} t+1}}{\Gamma(p_{\theta_1} t+1)} y^{(p_{\theta_1} t+1)-1} e^{-b_{\theta_1} y} dy \\
&= G_{G\theta_1}(\beta_{\theta_1} t, t) - \frac{p_{\theta_1}}{\beta_{\theta_1} b_{\theta_1}} \hat{G}_{G\theta_1}(\beta_{\theta_1} t, t),
\end{aligned}$$

da zusätzlich $\Gamma(p_{\theta_1} t + 1) = p_{\theta_1} t \Gamma(p_{\theta_1} t)$ nach Definition der Gamma-Funktion gültig ist. Somit wurde (9.45) gezeigt. \square

Wir haben somit eine mögliche Näherung zur Berechnung optimaler Rückversicherungsstrategien aufgezeigt. Weitere solche Verfahren finden sich z.B. in [14]. Dort wird auf analoge Weise eine verschobene Gammaverteilung betrachtet, deren ersten drei Momente mit denen der Gesamtschadensverteilung übereinstimmen. Dies führt zu einer genaueren Approximation auf Kosten der Laufzeit. Alternativ lässt sich der zusammengesetzte Poisson-Prozess $X_{\theta}(t)$ durch einen verschobenen Gamma-Prozess annähern, welches ebenfalls in [14] nachlesbar ist.

10. Zusammenfassung

Zum Abschluss dieser Arbeit möchten wir unsere Ergebnisse kurz zusammenfassen.

Nachdem in Kapitel 2 wesentliche Eigenschaften der momenterzeugenden Funktion sowie der Laplace-Transformation aufgestellt und gezeigt wurden, befasste sich Kapitel 3 mit der Einführung des zusammengesetzten Poisson-Prozesses. Wir konnten dabei u.a. nachweisen, dass sich die Momente einer Verteilung aus der momenterzeugenden Funktion unter gewissen Voraussetzungen berechnen lassen, selbst wenn deren rechter Konvergenzradius 0 ist.

Wir stellten im Folgenden fest, dass stochastische Prozesse mit càdlàg-Pfaden und unabhängigen, stationären Zuwächsen eine überaus nützliche Gleichung erfüllen. Wie zu Beginn von Kapitel 4 aufgezeigt, ließ sich diese von Takács ausgiebig behandelte Formel für den speziellen Fall eines Poisson-Prozesses induktiv beweisen. Für den allgemeinen Beweis waren analytische Hilfsfunktionen und Vorbetrachtungen von Nöten, welche wir letztendlich auf die Pfade unseres Prozesses anwenden konnten. Darüber folgte der Beweis dann zusätzlich mithilfe des bedingten Erwartungswertes.

Nachdem wir innerhalb dieser drei Kapitel hauptsächlich stochastische Prozesse betrachtet haben, wurde es an der Zeit sie im Bereich der Ruintheorie anzuwenden.

In Kapitel 5 erläuterten wir nun unser Ruinmodell, welches dem in der Praxis gängigen Cramér-Lundberg-Modell entsprach. Da wir mit diesem die stetigen Ruin- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten sowohl in endlicher, als auch unendlicher Zeit definieren konnten, begannen wir mit ersten Abschätzungen selbiger. Dabei erwies sich der Anpassungskoeffizient als nützliches Werkzeug. Nach einigen elementaren Überlegungen, welche wir am Beispiel von exponentialverteilten Einzelschäden demonstrierten, wurde uns schnell bewusst, dass vor allem Berechnungen der endlicher Ruinwahrscheinlichkeit für Schwierigkeiten sorgen.

Wir begannen Kapitel 6 mit mehreren Erneuerungsgleichungen, welche sich zunächst anschaulich verdeutlichen und später dank bedingter Wahrscheinlichkeiten nachweisen ließen. Diese lieferten uns, unabhängig von der Existenz einer Einzelschadensdichte, die Stetigkeit der Ruinwahrscheinlichkeit bezüglich beider Variablen. Im Anschluss folgten (partielle) Integro-Differentialgleichungen mit deren Hilfe wir in der Lage waren, die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit für unser Beispiel explizit zu berechnen. Sie sollten sich zudem als Grundstein für den Beweis unseres Hauptresultates erweisen.

Dieses folgte nun in Kapitel 7. Die beiden Formeln von Seal ermöglichten es uns, die Überlebenswahrscheinlichkeit lediglich mithilfe der Gesamtschadensverteilung, sowie ihrer schwachen Dichte zu berechnen. Der Beweis der ersten Formel beruhte dabei auf dem Satz von Takács und kam ohne existente Einzelschadensdichte aus. Deren Existenz war allerdings Voraussetzung für die zweite Formel von Seal. Der Beweis selbiger ergab sich aus Laplace-Transformation unserer partieller Integro-Differentialgleichung. Dank diesem Resultat, war es uns nun möglich die endliche Ruinwahrscheinlichkeit für unser Beispiel mit exponentialverteilten Einzelschäden anzugeben. Am Ende des Kapitels be-

fassten wir uns mit den Auswirkungen von Sprüngen der Einzelschadensverteilung. Es zeigte sich, dass sich Seals zweite Formel für diesen Fall fortsetzen ließ. Dabei entstanden jedoch von 0 verschiedene Terme im Bereich $(u, u + \beta x]$. Es stellte sich heraus, dass sich die Überlebenswahrscheinlichkeit, im Falle von Sprüngen der Gesamtschadensverteilung in diesem Bereich, im Vergleich zur zweiten Formel von Seal echt verkleinert. Wir folgerten zudem, dass in diesem Fall keine Approximation mit existenter Dichte zum exakten Ergebnis führt. Für Einzelschadensverteilungen mit Sprüngen, sollte also der allgemeine Satz von Seal angewandt werden.

Es war nun Ziel der letzten beiden Abschnitte, Anwendungsmöglichkeiten für die Formeln von Seal aufzuzeigen. Einleitend begannen wir somit in Kapitel 8 mit der Roulette-Aufgabe. Diese sollte uns die Notwendigkeit von Rückversicherungen aufzeigen. Es stellte sich dabei zunächst mathematisch heraus, dass größere Einzelschäden mit geringer Wahrscheinlichkeit, trotz gleichem Erwartungswert, für eine größere Ruinwahrscheinlichkeit sorgen, als es geringe Einzelschäden mit hoher Wahrscheinlichkeit tun. Dies wurde zudem numerisch aufgezeigt, indem wir eine passende Ruintabelle mithilfe eines Programms aufstellen und auswerten konnten.

Nachdem somit die Nützlichkeit von Rückversicherungen verdeutlicht wurde, stellten wir zu Beginn von Kapitel 9 die zwei grundlegendsten Arten selbiger, sowie unser Rückversicherungsmodell vor. Wir ließen eine periodische Änderung von Typ und Höhe der Rückversicherung zu und betrachteten damit ein diskretes, stochastisches Kontrollproblem, obwohl der zugrundeliegende Schadensprozess stetig war. Wir konnten nun, im Falle von existenter Einzelschadensdichte nach Rückversicherung, einen Algorithmus zur Bestimmung einer optimalen Strategie angeben. Hierbei wählten wir die Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit als unser Optimalitätskriterium. Es stellte sich jedoch heraus, dass es vor allem bei nichtproportionalen Rückversicherungsstrategien (wie etwa der Schadenexzedentenrückversicherung) zu Sprüngen bei der modifizierten Einzelschadensverteilung kam. Nach unseren Vorbetrachtungen war somit die zweite Formel von Seal nicht mehr anwendbar und sollte durch die allgemeine Formel von Seal ersetzt werden. Um dies (und andere numerische Probleme) zu umgehen, stellten wir zum Abschluss des Kapitels eine Näherung mithilfe einer Gammaverteilung vor. Diese war von den ersten beiden Momenten der Einzelschadensverteilung abhängig und stellte eine zulässige Näherung für die Gesamtschadensverteilung dar.

Es wäre im Weiteren u.a. wünschenswert, die Unterschiede der zweiten Formel von Seal und der allgemeinen Formel von Seal numerisch zu untermalen. Eine Implementierung erweist sich vor allem durch die Berechnung der Gesamtschadensverteilung als schwierig. Dies geschieht im Allgemeinen über den Panjer-Algorithmus, weist allerdings numerische Probleme, für eine hohe erwartete Schadensanzahl, auf.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die Formeln von Seal eine gute Berechnungsmöglichkeit für Ruin in endlicher Zeit darstellen. Mittels diesen, ist es numerisch möglich eine optimale Rückversicherungsstrategie näherungsweise zu ermitteln.

A. Anhang

Wir stellen nun das Programm vor, das in Kapitel 8 Verwendung fand. Es wurde in Java geschrieben und von Lutz Dubowski in Zusammenarbeit mit dem Autor dieser Arbeit verfasst und getestet. Es wird nun lediglich die Hauptberechnungsklasse vorgestellt. Zudem wurde das Programm so geschrieben, dass es bei Ausführung eine Textdatei erstellt, welche die entscheidenden Berechnungsgrößen beinhaltet. Weitere Informationen zum Programm finden sich durch Bemerkungen im Quelltext wieder.

Quelltext A.1 (Roulette-Aufgabe).

```
1 import java.io.BufferedWriter ;
2 import java.io.File ;
3 import java.io.FileWriter ;
4 import java.math.BigDecimal ;
5 import java.math.BigInteger ;
6 import java.math.MathContext ;
7 import java.util.ArrayList ;
8 import java.util.List ;
9
10 /**
11  * Diese Klasse berechnet die Ruinwahrscheinlichkeit
12  * eines Casinos fuer eine Roulette-Aufgabe und
13  * gibt diese als Textdokument aus.
14  * @author Lutz Dubowski & Patrick Reum
15  */
16 public class RuinCalculator {
17
18     private int M;
19     private int k;
20     private boolean output;
21
22     /**
23      * Setzt die Hauptparameter fuer die folgende Berechnung
24      *
25      * @param M – Schadenshoehe
26      * @param k – freie Reserve
27      * @param output – Ausgabeoption
28      * (true = detaillierte Ausgabe)
29      */
30     public RuinCalculator(int M, double k) {
31         this(M, k, false);
32     }
33
34     public RuinCalculator(int m, double k, boolean output) {
```

```

35     this.M = M;
36     this.k = (int) Math.floor(k);
37     this.output = output;
38 }
39
40 public void calculate() throws Exception {
41     File file = new File("Ruin.log");
42     BufferedWriter bw = new BufferedWriter(new FileWriter(
43         file));
44     int m = M - 1;
45     /**
46      * Index der Gleichvert.
47      */
48     double summand = 0;
49     /**
50      * Summand pro Iteration
51      */
52     double ruinNull = (36d * M - 36) / (37 * M - 36);
53     /**
54      * Ruinw. mit Reserve 0
55      */
56     double ruin = Math.pow(ruinNull, k+1);
57     /**
58      * Ruinw. mit Reserve k
59      */
60     if (output) {
61         bw.write("Ruinwahrscheinlichkeit mit Reserve 0:" +
62             ruinNull);
63         bw.newLine();
64     }
65     List<BigInteger> coefficientValues = null;
66     for (int n = 1; n <= k; n++) {
67         if (output) {
68             bw.write("—————Iteration n = " + n
69                 + "—————");
70             bw.newLine();
71         }
72         int x = k - n;
73         double retValue = 0.0;
74
75         coefficientValues = calculateCoefficient(n, m,
76             coefficientValues);
77         BigDecimal sumValue = BigDecimal.valueOf(0);
78         for (int i = 0; i <= x && i < coefficientValues.

```

```

75         size (); i++) {
76             sumValue = sumValue.add(new BigDecimal(
77                 coefficientValues.get(i)));
78         }
79         if (output) {
80             bw.write("Zwischensumme : " + sumValue);
81             bw.newLine();
82         }
83         BigDecimal value = BigDecimal.valueOf(Math.pow(m, n
84             ));
85         retValue = sumValue.divide(value, MathContext.
86             DECIMAL128).doubleValue();
87         if (output) {
88             bw.write("Zwischenquotient: " + retValue);
89             bw.newLine();
90         }
91         summand = (1 - ruinNull) * Math.pow(ruinNull, n) *
92             (1 - retValue);
93         ruin += summand;
94         if (output) {
95             bw.write("Zwischenwert Ruinw. mit Reserve k:
96                 " + ruin);
97             bw.newLine();
98         }
99     }
100
101     /**
102     * Berechnung der Koeffizienten der Gleichverteilung
103     */
104     private List<BigInteger> calculateCoefficient(int n, int m,
105         List<BigInteger> oldValues) {
106         List<BigInteger> values = new ArrayList<BigInteger>();
107
108         if (n != 1) {
109             int max = (m - 1) * n;
110             for (int i = 0; i <= max; i++) {

```

```

111         for (int j = 0; j < m; j++) {
112             int index = i - j;
113             if (index < 0 || index >= oldValues.size())
114                 {
115                     value.add(BigInteger.valueOf(0));
116                 } else {
117                     value = value.add(oldValues.get(index))
118                 };
119             }
120         }
121     } else {
122         for (int i = 0; i < m; i++) {
123             values.add(BigInteger.valueOf(1));
124         }
125     }
126
127     return values;
128 }
129 }

```

Literaturverzeichnis

- [1] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, New York, 1999.
- [2] J. H. Curtiss. *A Note on the Theory of Moment Generating Functions*. Annals of Math. Statistics, 1942.
- [3] P. Chareka. *A Finite-Interval Uniqueness Theorem for Bilateral Laplace Transforms*. Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, St. Francis Xavier University, Antigonish, 2007.
- [4] L. Takács. *On combinatorial methods in the theory of stochastic processes*. Wiley, New York, 1967.
- [5] H. L. Lebesgue. *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [6] W. H. Young, G. C. Young. *On the existence of a differential coefficient*. Proc. London Math. Soc., 1911.
- [7] W. Feller. *An Introduction to Probability and its Applications*. Volume 2, Wiley, New York, 2nd Edition, 1971.
- [8] H. U. Gerber. *Introduction to Mathematical Risk Theory*. Richard D. Irwin, Homewood, 1979.
- [9] G. Gripenberg, S. O. London, O. Staffans. *Volterra integral and functional equations*. Bull. London Math. Soc., 1991.
- [10] M. Schäl. *Über Lösungen einer Erneuerungsgleichung*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1971.
- [11] S. Roch. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Vorl. TU Darmstadt, 2006.
- [12] H.L. Seal. *Stochastic Theory of a Risk Business*. Wiley, New York, 1969.
- [13] N.U. Prabhu. *On the Ruin Problem of Collective Risk Theory*. Annals of Math. Statistics, 1961.
- [14] D.C.M. Dickson, H.R. Waters. *Optimal Dynamic Reinsurance*. Astin Bulletin, 2006.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort

Datum

Unterschrift