

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Die Puls-Lösungen der FitzHugh-Nagumo-Gleichungen

Diplomarbeit von
Johannes Wächtler
Matrikel-Nr. 9136019

Betreuer: Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Leipzig, Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Systeme mit zwei Zeitskalen	6
2.1	Geometrische singuläre Störungstheorie	6
2.2	Heterokline und homokline Orbits	12
2.3	Fenichel-Normalform und Shilnikov-Koordinaten	14
2.4	Melnikov-Integrale	16
3	Stabilität und Evans-Funktion	18
3.1	Stabilität von Travelling Waves	18
3.2	Konstruktion der Evans-Funktion	21
3.3	Ein Kriterium für Instabilität	24
4	Die Profilgleichung	29
4.1	Schichtproblem und reduziertes Problem	29
4.2	Orbits des Schichtproblems	31
5	Langsame Pulse	36
5.1	Existenz der langsamen Pulse	36
5.2	Instabilität der langsamen Pulse	39
6	Schnelle Pulse	46
6.1	Existenz der schnellen Pulse	46
6.2	Stabilität der schnellen Pulse	51
7	Intermediäre Pulse	56
7.1	Konstruktion	56
7.2	Stabilitätswechsel	58
	Literaturverzeichnis	61
	Zusammenfassung	64

1 Einleitung

Für die Beschreibung der Erregungsleitung in Nervenfasern erhielten A. L. Hodgkin und A. F. Huxley 1963 den Nobelpreis. Durch Experimente an den Riesenaxonen des Tintenfisches hatten sie entdeckt, dass Ionenflüsse durch die Axonmembran hindurch das Aktionspotential verursachen und damit die Grundlage der Erregungsleitung bilden. Diese neurophysiologischen Abläufe beschrieben Hodgkin und Huxley mathematisch durch ein System von vier Differentialgleichungen [17].

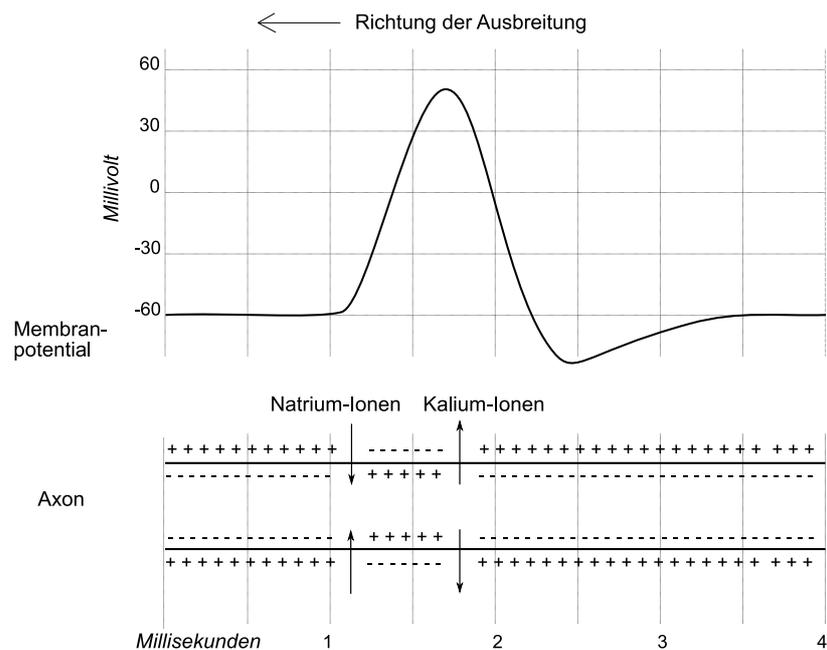


Abbildung 1.1: Ein Nervenimpuls breitet sich entlang des Axons als elektrisches Signal aus. Durch ein schnelles Einströmen von Natrium-Ionen durch die Membran hindurch kehrt sich das Membranpotential um. Diese Ladungsverschiebung wird durch einen anschließenden Ausstrom von Kalium-Ionen rückgängig gemacht und das Ruhepotential wiederhergestellt (Abbildung nach Keynes [24]).

Eine vereinfachte, auf die Arbeiten [13] und [28] zurückgehende Form dieses Modells sind die FitzHugh-Nagumo-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u) - w \\ w_t &= \varepsilon(u - \gamma w) \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit $f(u) = u(u - a)(1 - u)$, $0 < a < \frac{1}{2}$, und reellen Parametern $\gamma, \varepsilon > 0$. Dabei ist u

das Membranpotential und w eine Hilfsvariable, die den Ionenfluss durch die Membran beschreibt. Verglichen mit u entwickelt sich w sehr viel langsamer, so dass der Parameter ε als klein angenommen wird, $0 < \varepsilon \ll 1$. Für die Herleitung von (1.1) aus den Hodgkin-Huxley-Gleichungen und für eine genaue Darstellung des physiologischen Hintergrunds sei auf die bereits genannten Originalarbeiten sowie auf die Darstellung in Murray [27] verwiesen.

In dieser Arbeit wird die Frage nach Existenz und Stabilität der Puls-Lösungen von (1.1) diskutiert. Als Puls bezeichnet man eine Lösung $(u(x, t), w(x, t))$ von (1.1), die mit einem $c \in \mathbb{R}$ nur von der Variablen $\xi = x + ct$ abhängt,

$$(u(x, t), w(x, t)) = (\bar{u}(\xi), \bar{w}(\xi)), \quad (1.2)$$

und für $\xi \rightarrow \pm\infty$ gegen den Ruhezustand $(0, 0)$ von (1.1) konvergiert. Pulse sind also spezielle Formen von Travelling Waves.

Setzt man den Ansatz $(u(x, t), w(x, t)) = (\bar{u}(\xi), \bar{w}(\xi))$ in (1.1) ein, so führt dies auf die Profildifferentialgleichung

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w \\ w' &= \frac{\varepsilon}{c}(u - \gamma w) \end{aligned} \quad (1.3)$$

($' = d/d\xi$). Die Puls-Lösungen von (1.1) entsprechen den zu $p_0 = (0, 0, 0)$ homoklinen Orbits in (1.3). Hierbei sei $\gamma > 0$ hinreichend klein, so dass p_0 der einzige Fixpunkt von (1.3) ist.

Die Profildifferentialgleichung (1.3) ist mit $\varepsilon \ll 1$ ein System mit zwei Zeitskalen und die Existenz zu p_0 homokliner Orbits kann durch Methoden der geometrischen singulären Störungstheorie gezeigt werden. Dazu konstruiert man bei $\varepsilon = 0$ zwei singuläre homokline Orbits Γ_{s0} und Γ_{f0} von (1.3), die für $c = 0$ beziehungsweise $c = c^* > 0$ existieren. Für kleine $\varepsilon > 0$ erhält man dann zu p_0 homokline Orbits Γ_s mit $c \approx 0$ und Γ_f mit $c \approx c^*$ als Störungen von Γ_{s0} und Γ_{f0} . Die den Orbits Γ_s entsprechenden Pulse von (1.1) bezeichnet man als *langsame Pulse*, die den Γ_f entsprechenden als *schnelle Pulse* (mitunter bezeichnet man auch die homoklinen Orbits Γ_s und Γ_f selbst als langsame beziehungsweise schnelle Pulse).

Während die langsamen Pulse etwa durch das von Szmolyan [31] beschriebene Verfahren leicht konstruiert werden können, ist die Konstruktion der schnellen Pulse anspruchsvoller. Die Schwierigkeit liegt darin, die Lage von gewissen invarianten Mannigfaltigkeiten in der Nähe einer langsamen Mannigfaltigkeit von (1.3) zu bestimmen. Im Existenzbeweis von Jones, Kopell und Langer [18] wird dieses Problem mit Hilfe des Exchange Lemmas [19] gelöst, mit dem sich der Abstand einer invarianten Mannigfaltigkeit zu einer langsamen Mannigfaltigkeit kontrollieren lässt. Eine alternative Methode der Konstruktion liefern Krupa, Sandstede und Szmolyan [25], indem sie die Existenz von Shilnikov-Koordinaten nutzen, die den nichtlinearen Fluss in der Nähe

einer langsamen Mannigfaltigkeit bis auf einen Fehler höherer exponentieller Ordnung beschreiben.

Der neue Beweis für die Existenz schneller Wellen ist aber nicht das Hauptergebnis von Krupa, Sandstede und Szmolyan [25]. Mit den Shilnikov-Koordinaten gelingt es ihnen zu zeigen, dass bei $a \approx \frac{1}{2}$ noch eine dritte Art von Pulsen konstruiert werden kann. Diese Pulse entstehen als Störung eines für $\varepsilon = c = 0$ und $a = \frac{1}{2}$ existierenden heteroklinen Zyklus Γ_0 von p_0 nach $p_1 = (1, 0, 0)$. Im Einzelnen wird gezeigt, dass für jedes $a < \frac{1}{2}$ nahe $a = \frac{1}{2}$ eine Kurve $\{(c, \varepsilon_a(c)) : 0 \leq c \leq c^*\}$ existiert, deren Punkte jeweils einen zu p_0 homoklinen Orbit in (1.3) liefern. Neben der Konstruktion der schnellen Pulse durch Shilnikov-Koordinaten werde ich in dieser Arbeit auch die Konstruktion dieser Kurve darstellen, die im Parameterraum eine Verbindung zwischen langsamen und schnellen Pulsen schafft. Ob – wie von Yanagida [34] vermutet – eine solche Verbindung von langsam zu schnell auch für beliebiges $0 < a < \frac{1}{2}$ existiert, ist weiterhin offen (vgl. [25]).

Eine Puls-Lösung $\bar{U}(\xi) = (\bar{u}(\xi), \bar{w}(\xi))$ von (1.1) nennt man (nichtlinear) stabil, wenn Lösungen von (1.1), deren Anfangswerte in der Supremumsnorm nahe bei $\bar{U}(\xi)$ liegen, gegen einen möglicherweise verschobenen Puls $\bar{U}(\cdot + k)$, $k \in \mathbb{R}$, konvergieren. Um zu erkennen, ob ein Puls stabil ist, betrachtet man die Linearisierung von (1.1) entlang des Pulses und erhält so einen linearen Operator L auf einem gewissen Banachraum. Liegen keine Anteile des Spektrums von L in der rechten Halbebene, so nennt man den Puls linear oder spektral stabil. Dass im Fall der FitzHugh-Nagumo-Gleichungen lineare Stabilität äquivalent zu nichtlinearer Stabilität ist, wurde von Evans gezeigt [7, 10]. In den Arbeiten [7–10] wurde auch erstmals eine analytische Funktion definiert, um das Punktspektrum von L , also Eigenwerte endlicher Vielfachheit, zu lokalisieren. Die heute als Evans-Funktion bezeichnete Funktion $D(\lambda)$ wird dabei auf einem Gebiet der komplexen Ebene, das die rechte Halbebene umfasst und keinen gemeinsamen Schnitt mit dem wesentlichen Spektrum von L besitzt, so konstruiert, dass ihre Nullstellen genau die Eigenwerte von L sind. Die Evans-Funktion wird das entscheidende Werkzeug für die Stabilitätsanalyse der langsamen und schnellen Pulse sein.

Aus der Instabilität des bei $c = 0$ existierenden Pulses der Nagumo-Gleichung

$$u_t = u_{xx} + f(u) \tag{1.4}$$

folgt die Instabilität der langsamen Pulse, wie von Flores [14] gezeigt wurde (der Nagumo-Puls entspricht dem Orbit Γ_{s_0}). Ich werde in dieser Arbeit mit Hilfe der geometrischen singulären Störungstheorie einen alternativen Beweis dieser Instabilitätsaussage liefern.

Dass die schnellen Pulse stabil sind, haben Jones [20] und Yanagida [34] unabhängig voneinander bewiesen. Jones zeigt, dass die zugehörige Evans-Funktion $D(\lambda)$ keine Nullstelle in der rechten Halbebene besitzt, falls die Ableitung $D'(\lambda)$ in $\lambda = 0$ strikt positiv ist (die Evans-Funktion ist reell für reelle λ). Da das Vorzeichen von $D'(0)$ wiedergibt, in welcher Richtung sich stabile und instabile Mannigfaltigkeit von p_0 bezüglich

c schneiden, ist die Stabilitätsfrage damit zurückgeführt auf eine geometrische Frage. Die hierzu benötigten Informationen über den Schnitt der Mannigfaltigkeiten erhält Jones aus dem Existenzbeweis von Langer (die Arbeit von Langer lag mir nicht vor, vgl. aber [20]). Ich werde zeigen, wie man diese geometrischen Informationen direkt anhand der bei der Konstruktion der Pulse verwendeten Shilnikov-Koordinaten gewinnen kann.

Die Existenz der Kurve bei $a \approx \frac{1}{2}$, die langsame und schnelle Pulse miteinander verbindet, wirft eine zusätzliche Frage auf. Da die langsamen Pulse instabil, die schnellen aber stabil sind, muss es entlang der Kurve zu einem Stabilitätswechsel kommen. Wo dieser Stabilitätswechsel passiert, ist noch offen. In [25] wird das Maximum der (c, ε) -Kurve als möglicher Punkt genannt, jedoch ohne Begründung. Ich werde am Ende dieser Arbeit versuchen zu erklären, warum sich dieser Punkt geometrisch für den Wechsel von instabil zu stabil zumindest anbietet.

Neben der Theorie der Evans-Funktion bildet die bereits erwähnte geometrische singuläre Störungstheorie den technischen Hintergrund der vorliegenden Arbeit. Diese auf Fenichel [11, 12] zurückgehende Theorie ermöglicht eine Analyse von schnell-langsam Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen anhand von invarianten Mannigfaltigkeiten zweier Grenzsysteeme. Sowohl in den Konstruktionen als auch in den Stabilitätsuntersuchungen der Pulse werden darüber hinaus Melnikov-Integrale eine zentrale Rolle spielen.

Die FitzHugh-Nagumo-Gleichungen (1.1) zählen zu den berühmtesten Reaktions-Diffusions-Gleichungen. Ihre Dynamik gilt gemeinhin als bearbeitet und zusammen mit der Profilgleichung (1.3) dienen sie häufig als Beispiel für die Anwendung unterschiedlichster Techniken und Konzepte. Insbesondere Existenz und Stabilität von Pulsen sind geklärt (die wesentlichen Literaturhinweise finden sich in den Einleitungen von [20] oder [14]). Meine Arbeit hat daher vordergründig den Charakter eines Überblicks. Diesen Charakter verliert sie zumindest dort, wo die für die Stabilität wichtigen geometrischen Informationen aus den Shilnikov-Koordinaten gewonnen werden. Hier dienen die FitzHugh-Nagumo-Gleichungen ein weiteres Mal als Beispiel für die Anwendung einer neuen Technik.

Überdies sind im Hinblick auf die Dynamik von (1.3) auch abgesehen von der o. a. Beschaffenheit des Stabilitätswechsels durchaus noch Fragen offen. Unklar ist etwa die Existenz von n -Pulsen, also von zu p_0 homoklinen Orbits von (1.3), die n -mal dicht an p_0 vorbeilaufen und erst dann im Fixpunkt enden. Krupa, Sandstede und Szmolyan liefern ein Indiz für die Existenz solcher Orbits, indem sie zeigen, dass ein sogenannter *inclination-flip point* für (1.3) existiert (vgl. [25]). Auf dieses Problem werde ich hier jedoch nicht näher eingehen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Gegenstand des ersten Teils ist der theoretische Hintergrund. Im *zweiten* Kapitel werden zunächst die nötigen Sätze der geometrischen singulären Störungstheorie in allgemeinerer Form bereitgestellt, die Fenichel-Normalform

und die Shilnikov-Koordinaten eingeführt sowie die Melnikov-Theorie knapp skizziert. Im *dritten* Kapitel wird der Zusammenhang zwischen linearer und nichtlinearer Stabilität näher erläutert und die Evans-Funktion $D(\lambda)$ für eine Klasse von Gleichungen konstruiert, zu der auch (1.1) und (1.4) gehören. Ferner wird ein Kriterium für Instabilität beschrieben und eine Darstellung von $D'(0)$ entwickelt.

So mit den nötigen Werkzeugen ausgestattet, erfolgt im zweiten Teil der Arbeit die eigentliche Analyse der FitzHugh-Nagumo-Gleichungen. Im *vierten* Kapitel werden die schnell-langsame Struktur der Profilgleichung (1.3) diskutiert und die singulären Orbits Γ_{s_0} und Γ_{f_0} konstruiert. Das *fünfte* Kapitel behandelt die langsamen Pulse. Dazu wird ein kurzer Existenzbeweis gegeben und die Instabilität gezeigt. Im *sechsten* Kapitel wird die Konstruktion der schnellen Pulse mit Hilfe der Shilnikov-Koordinaten dargestellt und nach einer kurzen Zusammenfassung des Stabilitätsbeweises von Jones [20] die relevante geometrische Größe aus den Shilnikov-Koordinaten gewonnen. Im *siebten* und letzten Kapitel wird die Konstruktion der intermediären Pulse für $a \lesssim \frac{1}{2}$ beschrieben. Abschließend wird erläutert, warum man den Stabilitätswechsel im Maximum der Verbindungskurve vermuten darf.

2 Systeme mit zwei Zeitskalen

2.1 Geometrische singuläre Störungstheorie

Dieser Abschnitt orientiert sich in seiner Darstellung an den Arbeiten von Jones [21] und Szmolyan [31]. Ausgangspunkt ist das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^{k+n}$, $\varepsilon \in I \subset \mathbb{R}$ und $\dot{} = \frac{d}{dt}$. Auch wenn die Ergebnisse dieses Abschnitts schon bei geringerer Regularität von f und g möglich sind (vgl. [31]), beschränken wir uns hier auf den Fall beliebig oft differenzierbarer Funktionen. Die erste von drei Annahmen, die im Verlauf dieses Abschnitts formuliert werden sollen, lautet daher

(H1) $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine offene Menge und I ein offenes Intervall mit $0 \in I$. Die Funktionen f und g sind auf $U \times I$ beliebig oft differenzierbar, $f, g \in C^\infty(U \times I, \mathbb{R}^{n+k})$.

Die Gleichungen (2.1) definieren für $\varepsilon \neq 0$ ein dynamisches System auf U mit zwei Zeitskalen: Die Variable x entwickelt sich für kleine $\varepsilon > 0$ sehr viel schneller als y , dessen Geschwindigkeit von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ist. Demzufolge nennt man x die schnelle Variable, y die langsame Variable und bezeichnet (2.1) selbst als das schnelle System. Transformiert man (2.1) auf die langsame Zeitskala $\tau := \varepsilon t$, so liefert dies das zugehörige langsame System

$$\begin{aligned}\varepsilon x' &= f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= g(x, y, \varepsilon)\end{aligned}\tag{2.2}$$

mit $' = \frac{d}{d\tau}$. Die beiden, jeweils der schnellen beziehungsweise der langsamen Dynamik angepassten Skalierungen t und τ sind für $\varepsilon \neq 0$ äquivalent, im Grenzfall $\varepsilon = 0$ ergeben sich aus (2.1) und (2.2) aber zwei sehr verschiedene Systeme, die jeweils nur die schnelle oder aber nur die langsame Dynamik wiedergeben. Das schnelle System führt auf das *Schichtproblem*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, 0) \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

das langsame System auf das *reduzierte Problem*

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, 0) \\ y' &= g(x, y, 0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

In (2.4) ist nur eine Gleichung für die langsame Dynamik in y übrig geblieben. Die x -Dynamik ist degeneriert zu der Bedingung $f(x, y, 0) = 0$, so dass (2.4) nur auf der Menge

$$\mathcal{S} := \{(x, y) \in U : f(x, y, 0) = 0\}$$

definiert ist, die selbst wiederum ganz aus Ruhelagen des Schichtproblems besteht. Der Fluss von (2.3) ist daher trivial auf \mathcal{S} und allgemein ist y in (2.3) nur noch ein Parameter. Durch die beiden Grenzsysteeme wird die Dynamik also zerlegt in schnell und langsam. Unter gewissen Voraussetzungen gelingt es nun aber, Eigenschaften der Grenzsysteeme (2.3) und (2.4) so zusammenzufügen, dass man zumindest für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ein Bild der vollständigen Dynamik des gestörten Systems (2.1) erhält. Anstatt (2.1) selbst zu untersuchen, kann man sich deshalb auf die Untersuchung der beiden kleineren, niederdimensionalen Systeme (2.3) und (2.4) beschränken.

Wir nehmen nun an, dass eine Mannigfaltigkeit M_0 in \mathcal{S} und Zahlen k^s und k^u , $k^s + k^u = k$, existieren, so dass in jedem Punkt $(x, y) \in M_0$ die Linearisierung

$$D_x f(x, y, 0)$$

jeweils k^s Eigenwerte mit negativem Realteil und k^u Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt. Jeder Punkt $(x, y) \in M_0$ soll also hyperbolischer Fixpunkt von $\dot{x} = f(x, y, 0)$ sein. Dies bedeutet, dass die Richtungen normal zu M_0 entweder anziehend oder abstoßend sind, während das Vektorfeld von (2.3) entlang M_0 verschwindet. Die Mannigfaltigkeit M_0 ist damit eine *normal hyperbolische Mannigfaltigkeit* des Schichtproblems (für eine allgemeinere Definition von normaler Hyperbolizität vgl. [32]). Wir formulieren dies als zweite Annahme:

(H2) Die Menge M_0 ist eine kompakte Mannigfaltigkeit (möglicherweise mit Rand) und normal hyperbolisch bezüglich des Schichtproblems (2.3). Ferner existieren natürliche Zahlen k^s und k^u , $k^s + k^u = k$, so dass die Linearisierung $D_x f$ in jedem Punkt auf M_0 genau k^s Eigenwerte in der linken und k^u Eigenwerte in der rechten Halbebene besitzt.

Die Mannigfaltigkeit M_0 wird als *kritische Mannigfaltigkeit* bezeichnet. Es bezeichne $\cdot t$ den Fluss von (2.1) auf $U \times I$. Dann heißt eine Menge M *lokal invariant* bezüglich (2.1), falls eine Umgebung V von M existiert, so dass für alle $x \in M$, $t > 0$ aus $x \cdot [0, t] \subset V$ folgt, dass $x \cdot [0, t] \subset M$ (aus $x \cdot [-t, 0] \subset V$ entsprechend $x \cdot [-t, 0] \subset M$). Ein erster wichtiger Satz von Fenichel besagt, dass unter den Voraussetzungen (H1) und (H2) für hinreichend kleine $\varepsilon \neq 0$ zu M_0 diffeomorphe Mannigfaltigkeiten M_ε existieren, die in einer $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -Umgebung von M_0 liegen und lokal invariant unter dem Fluss von (2.1) sind.

Möglicherweise besitzen die Mannigfaltigkeiten M_ε einen Rand, durch den Lösungen die Mannigfaltigkeiten verlassen können, und sind daher nur lokal invariant.

Um die Mannigfaltigkeiten M_ε als Graphen darstellen zu können, fügen wir noch eine weitere Annahme hinzu.

(H3) Die Mannigfaltigkeit M_0 ist Graph einer C^∞ -Funktion h^0 , die auf einer kompakten, einfach zusammenhängenden Menge K definiert ist,

$$M_0 = \{(x, y) : x = h^0(y), y \in K\}.$$

Aus (H2) folgt insbesondere, dass

$$D_x f(x, y, 0)$$

in jedem Punkt $(x, y) \in M_0$ vollen Rang hat. Daher ergibt sich die lokale Darstellung von M_0 als Graph bereits aus dem Satz über die implizite Funktion und mit (H3) wird nur angenommen, dass dies auch global möglich ist.

Satz 2.1 ([21]) *Unter den Voraussetzungen (H1)-(H3) existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und für $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ eine auf K definierte Funktion h^ε , so dass*

$$M_\varepsilon = \{(x, y) : x = h^\varepsilon(y), y \in K\}$$

lokal invariant unter (2.1) ist. Die Funktion h^ε ist in y und ε C^r -regulär für jedes $r < +\infty$.

Die M_ε bilden eine Zentrumsmanifold für das erweiterte schnelle System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Linearisierung der rechten Seite von (2.5) in $(x, y, 0) \in M_0 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ besitzt den $(n+1)$ -fachen trivialen Eigenwert $\lambda = 0$ und k nichttriviale Eigenwerte. Dies sind genau die Eigenwerte von $D_x f(x, y, 0)$, so dass der stabile Eigenraum $E_{(x,y,0)}^s$ damit k^s -dimensional, der instabile $E_{(x,y,0)}^u$ k^u -dimensional und der neutrale $E_{(x,y,0)}^c$ folglich $(n+1)$ -dimensional ist. Die C^r -Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{C} := \bigcup_{-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0} M_\varepsilon \times \{\varepsilon\}$$

ist nun eine zu $E_{(x,y,0)}^c$ tangentielle, lokal invariante Mannigfaltigkeit, also eine $(n+1)$ -dimensionale Zentrumsmanifold zu (2.5) bei $M_0 \times \{0\}$ (daher ist auch h^ε eine C^r -Funktion mit beliebigem $r < \infty$, aber im Allgemeinen keine C^∞ -Funktion, vgl. [2, 12]).

Die Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{C} und die Mannigfaltigkeiten M_ε sind nun die für das weitere Vorgehen wesentlichen Objekte. Die als *langsame Mannigfaltigkeiten* bezeichneten M_ε sind lokal invariant unter (2.1) und werden durch y parametrisiert. Auf M_ε wird die Dynamik von (2.1) demzufolge allein durch die Gleichung

$$\dot{y} = \varepsilon g(h^\varepsilon(y), y, \varepsilon) \quad (2.6)$$

beschrieben. In der für $\varepsilon \neq 0$ äquivalenten langsamen Skalierung ist (2.6) gegeben als

$$y' = g(h^\varepsilon(y), y, \varepsilon). \quad (2.7)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht diese Gleichung (2.7) aber nun regulär über in das reduzierte Problem

$$y' = g(h^0(y), y, 0)$$

auf M_0 . Das langsame Problem auf \mathcal{C}

$$\begin{aligned} y' &= f(h^\varepsilon(y), x, \varepsilon) \\ \varepsilon' &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

lässt sich also in $\varepsilon = 0$ glatt fortsetzen: Auf der Zentrumsmannigfaltigkeit ist die singuläre Störung eine reguläre Störung. Dies ist der entscheidende Punkt, da durch Restriktion von (2.1) auf \mathcal{C} folglich jede Struktur in

$$\mathcal{S}_H := \{(x, y, 0) \in \mathcal{S} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) : (x, y) \text{ ist hyperbolischer Fixpunkt von (2.3)}\},$$

die robust gegenüber regulären Störungen ist, auch robust gegenüber der singulären Störung ist. Dazu muss lediglich die kritische Mannigfaltigkeit M_0 so gewählt werden, dass die entsprechende Struktur auf ihr liegt. Insbesondere werden hyperbolische Fixpunkte des reduzierten Problems für kleine $\varepsilon > 0$ als hyperbolische Fixpunkte von (2.2) persistieren – oder allgemeiner: kompakte normal hyperbolische invariante Mannigfaltigkeiten des reduzierten Problems persistieren für $\varepsilon > 0$ als kompakte normal hyperbolische invariante Mannigfaltigkeiten des gestörten Systems (2.2).

Die Dynamik von (2.1) auf den langsamen Mannigfaltigkeiten M_ε kann also mit Hilfe der Dynamik des reduzierten Problems (2.4) auf M_0 beschrieben werden. Um auch ein Bild der Dynamik außerhalb der M_ε zu bekommen, betrachtet man zwei weitere lokal invariante Mannigfaltigkeiten.

Unter den Voraussetzungen (H1) und (H2) existieren bei $M_0 \times \{0\}$ neben der Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{C} auch eine zentrumsstabile Mannigfaltigkeit \mathcal{C}^s und eine zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit \mathcal{C}^u für (2.5), also unter (2.5) lokal invariante Mannigfaltigkeiten mit $\mathcal{C}^s \cap \mathcal{C}^u = \mathcal{C}$, die in $(x, y, 0) \in M_0 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ tangential zu $E_{(x,y,0)}^s$ beziehungsweise $E_{(x,y,0)}^u$ sind. Die Existenz von \mathcal{C}^s und \mathcal{C}^u liefert das Theorem 9.1 in [12]. Um diese Mannigfaltigkeiten gut beschreiben zu können, benötigen wir noch folgenden Begriff.

Definition 2.2 $\{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{C}^s\}$ heißt C^{r_2} -Familie stabiler C^{r_1} -Mannigfaltigkeiten für \mathcal{C}^s nahe M_0 , falls

- (i) Für jedes $p \in \mathcal{C}^s$ ist $\mathcal{F}^s(p)$ eine C^{r_1} -Mannigfaltigkeit mit $p \in \mathcal{F}^s(p)$.
- (ii) Für $p, q \in \mathcal{C}^s$ sind $\mathcal{F}^s(p)$ und $\mathcal{F}^s(q)$ identisch oder disjunkt.
- (iii) Für $(x, y) \in M_0$ ist $\mathcal{F}^s(x, y, 0)$ in $(x, y, 0)$ tangential zu $E_{(x, y, 0)}^s$.
- (iv) $\{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{C}^s\}$ ist eine positiv invariante C^{r_2} -Familie, d. h.

$$\mathcal{F}^s(p) \cdot t \subset \mathcal{F}^s(p \cdot t)$$

für alle $p \in \mathcal{C}^s$ und $t \geq 0$ mit $p \cdot [0, t] \subset \mathcal{C}^s$.

Entsprechend definiert man eine Familie instabiler Mannigfaltigkeiten $\{\mathcal{F}^u(p) : p \in \mathcal{C}^u\}$ für \mathcal{C}^u . Man nennt $\mathcal{F}^s(p)$ die stabile, $\mathcal{F}^u(p)$ die instabile Faser von $p \in \mathcal{C}$.

Für $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ bezeichne $\mathcal{F}_\varepsilon^{s/u}(p)$ die Projektion von $\mathcal{F}^{s/u}(p)$ von $U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ auf U . Damit ist $\mathcal{F}_0^s(x, y)$ die stabile, $\mathcal{F}_0^u(x, y)$ die instabile Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Fixpunktes $(x, y) \in M_0$ von

$$\dot{x} = f(x, y, 0).$$

Die Mannigfaltigkeiten \mathcal{C}^s und \mathcal{C}^u lassen sich mit diesen Fasern nun wie folgt charakterisieren.

Satz 2.3 ([12, 31]) *Unter den Voraussetzungen (H1) und (H2) gilt*

- (i) *Es existiert eine Familie stabiler Mannigfaltigkeiten $\{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{C}^s\}$ für \mathcal{C}^s nahe M_0 . Ist $p \in U \times \{\varepsilon\}$, so ist $\mathcal{F}^s(p) \subset U \times \{\varepsilon\}$. Jede Mannigfaltigkeit $\mathcal{F}^s(p)$ schneidet \mathcal{C} transversal in genau einem Punkt.*
- (ii) *Es existiert eine Familie instabiler Mannigfaltigkeiten $\{\mathcal{F}^u(p) : p \in \mathcal{C}^u\}$ für \mathcal{C}^u nahe M_0 . Ist $p \in U \times \{\varepsilon\}$, so ist $\mathcal{F}^u(p) \subset U \times \{\varepsilon\}$. Jede Mannigfaltigkeit $\mathcal{F}^u(p)$ schneidet \mathcal{C} transversal in genau einem Punkt.*

\mathcal{F}^s und \mathcal{F}^u liefern eine Blätterung von \mathcal{C}^s und \mathcal{C}^u :

$$\mathcal{C}^s = \bigcup_{p \in \mathcal{C}} \mathcal{F}^s(p), \quad \mathcal{C}^u = \bigcup_{p \in \mathcal{C}} \mathcal{F}^u(p).$$

Die stabile Mannigfaltigkeit von M_ε ist somit gegeben als

$$W^s(M_\varepsilon) = \bigcup_{p \in M_\varepsilon} \mathcal{F}_\varepsilon^s(p), \tag{2.9}$$

die instabile Mannigfaltigkeit als

$$W^u(M_\varepsilon) = \bigcup_{p \in M_\varepsilon} \mathcal{F}_\varepsilon^u(p). \tag{2.10}$$

Die Bezeichnungen von $W^s(M_\varepsilon)$ als stabile und von $W^u(M_\varepsilon)$ als instabile Mannigfaltigkeit müssen für $\varepsilon > 0$ etwas erläutert werden, da – anders als M_0 – die Mannigfaltigkeiten M_ε nicht mehr ausschließlich aus kritischen Punkten bestehen. Die Punkte in

$W^s(M_\varepsilon)$ und $W^u(M_\varepsilon)$ zeichnen sich jedoch dadurch aus, dass sie sich mit dem Fluss $\cdot t$ für $t > 0$ beziehungsweise $t < 0$ der Mannigfaltigkeit M_ε exponentiell schnell nähern (vgl. [21]).

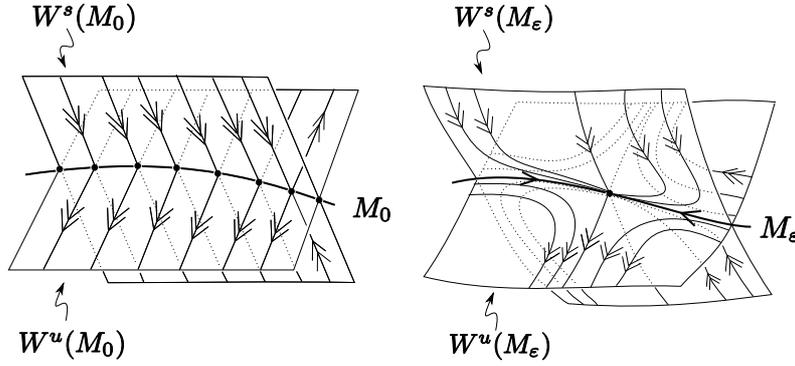


Abbildung 2.1: Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten von M_0 und M_ε . Der langsame Fluss wird durch einfache, der schnelle durch doppelte Pfeile gekennzeichnet. In der hier schematisch dargestellten Situation existiert auf M_ε ein anziehender Fixpunkt des reduzierten Problems.

Der folgende Satz beschreibt die wesentliche Beziehung zwischen den Gleichungen (2.3) und (2.4) und der gestörten Gleichung (2.1).

Satz 2.4 ([31]) *Es sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_H$ eine j -dimensionale kompakte normal hyperbolische invariante Mannigfaltigkeit des reduzierten Problems (2.4) mit einer $(j + j^s)$ -dimensionalen lokal stabilen Mannigfaltigkeit W^s und einer $(j + j^u)$ -dimensionalen lokal instabilen Mannigfaltigkeit W^u . Dann existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass folgende Aussagen gelten:*

(i) *Es existiert eine glatte Schar von Mannigfaltigkeiten*

$$\{\mathcal{N}_\varepsilon : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$$

mit $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ und \mathcal{N}_ε ist eine normal hyperbolische invariante Mannigfaltigkeit von (2.1).

(ii) *Es existieren glatte Scharen von $(j + j^s + k^s)$ - und $(j + j^u + k^u)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*

$$\{\mathcal{N}_\varepsilon^s : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}, \quad \{\mathcal{N}_\varepsilon^u : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$$

derart, dass für $\varepsilon > 0$ $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ und $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ lokal stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeiten von \mathcal{N}_ε sind.

(iii) *Für $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\mathcal{N}_\varepsilon^s = \bigcup_{p \in \mathcal{W}_\varepsilon^s} \mathcal{F}_\varepsilon^s(p), \quad \mathcal{N}_\varepsilon^u = \bigcup_{p \in \mathcal{W}_\varepsilon^u} \mathcal{F}_\varepsilon^u(p),$$

wobei $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ die lokal stabile, $\mathcal{W}_\varepsilon^u$ die lokal instabile Mannigfaltigkeit von \mathcal{N}_ε für den auf M_ε restringierten Fluss sei.

2.2 Heterokline und homokline Orbits

Es seien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 invariante Mannigfaltigkeiten eines dynamischen Systems (etwa Fixpunkte). Einen Orbit, dessen Punkte allesamt sowohl in der instabilen Mannigfaltigkeit von \mathcal{N}_1 als auch in der stabilen Mannigfaltigkeit von \mathcal{N}_2 liegen, bezeichnet man als einen *heteroklinen* Orbit von \mathcal{N}_1 nach \mathcal{N}_2 . Gilt $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, so spricht man von einem *homoklinen* Orbit.

Heterokline und homokline Orbits können in singulär gestörten Gleichungen der Gestalt (2.1) für kleine $\varepsilon > 0$ als Störung von *singulären* heteroklinen und homoklinen Orbits konstruiert werden. Diese bestehen aus Orbits des reduzierten Problems und des Schichtproblems und verbinden invariante Mannigfaltigkeiten des reduzierten Problems. Für eine solche Konstruktion heterokliner und homokliner Orbits ist die Persistenz transversaler Schnitte von Mannigfaltigkeiten unter regulären Störungen von zentraler Bedeutung.

Definition 2.5 *Es seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 Untermannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 schneiden sich transversal in einem Punkt $m \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ genau dann, wenn*

$$T_m\mathcal{M}_1 + T_m\mathcal{M}_2 = T_m\mathcal{M}.$$

Wir nehmen für diesen Abschnitt an, dass $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H$. Dabei muss \mathcal{S} nicht zusammenhängend sein, sondern kann aus mehreren Teilen bestehen, etwa

$$\mathcal{S}_1 = \{(x_1(y), y) : y \in U_1 \subset \mathbb{R}^n\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(x_2(y), y) : y \in U_2 \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Die lokale Darstellung $x_i = x_i(y)$ folgt wieder aus dem Satz über die implizite Funktion und wir setzen voraus, dass $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Beide Zweige von \mathcal{S} bestehen also aus hyperbolischen Fixpunkten des Schichtproblems, wobei die Dimensionen k_i^s und k_i^u nicht übereinstimmen müssen. Es seien nun $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{S}_1$ und $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{S}_2$ zwei normal hyperbolische invariante Mannigfaltigkeiten des reduzierten Problems. Ein singulärer heterokliner Orbit von \mathcal{N}_1 nach \mathcal{N}_2 setzt sich aus einem Orbit des reduzierten Problems in \mathcal{S}_1 , einem heteroklinen Orbit des Schichtproblems und einem Orbit des reduzierten Problems in \mathcal{S}_2 zusammen: Von \mathcal{N}_1 aus geht man entlang \mathcal{W}_1^u zu einem Punkt p_1 , von dem aus man mit dem schnellen Fluss einen Punkt $p_2 \in \mathcal{W}_2^s$ erreicht, um schließlich entlang \mathcal{W}_2^s nach \mathcal{N}_2 zu gelangen. Ein singulärer homokliner Orbit lässt sich im Fall $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ analog zusammensetzen.

Ein solcher singulärer Orbit existiert genau dann, wenn die singuläre instabile Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_1^u = \bigcup_{p \in \mathcal{W}_1^u} \mathcal{F}_0^u(p)$$

von \mathcal{N}_1 sich echt mit der singulären stabilen Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_2^s = \bigcup_{p \in \mathcal{W}_2^s} \mathcal{F}_0^s(p)$$

von \mathcal{N}_2 schneidet. Nach Satz 2.4 geht die singuläre instabile Mannigfaltigkeit \mathcal{N}_1^u für kleine $\varepsilon > 0$ regulär über in die instabile Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^u$ von $\mathcal{N}_{1,\varepsilon}$, die singuläre stabile Mannigfaltigkeit \mathcal{N}_2^s geht regulär über in die stabile Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^s$ von $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}$. Schneiden sich \mathcal{N}_1^u und \mathcal{N}_2^s also transversal, so werden sich wegen der Stabilität transversaler Schnitte für kleine $\varepsilon > 0$ auch $\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^u$ und $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^s$ schneiden. Ein solcher Schnitt liefert einen heteroklinen Orbit von $\mathcal{N}_{1,\varepsilon}$ nach $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}$.

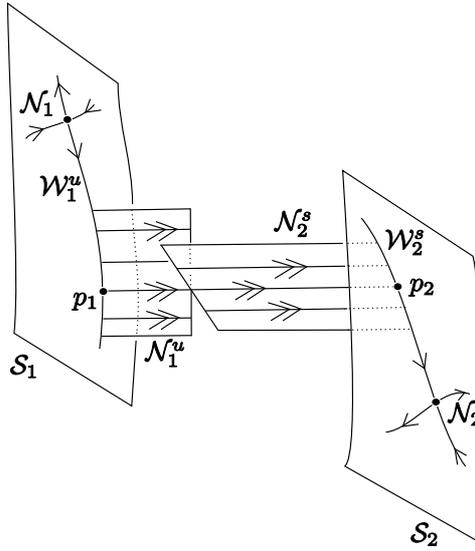


Abbildung 2.2: Singulärer Orbit von \mathcal{N}_1 nach \mathcal{N}_2

Satz 2.6 ([31]) *Angenommen,*

$$\mathcal{N}_1^u = \bigcup_{p \in \mathcal{W}_1^u} \mathcal{F}_0^u(p), \quad \mathcal{N}_2^s = \bigcup_{p \in \mathcal{W}_2^s} \mathcal{F}_0^s(p)$$

schneiden sich transversal entlang eines singulären heteroklinen Orbits. Dann existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ im singulär gestörten Problem (2.1) ein transversaler heterokliner Orbit von $\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^u$ nach $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^s$ existiert.

Entsprechend lassen sich auch zu einem Fixpunkt \mathcal{N} homokline Orbits konstruieren:

Satz 2.7 ([31]) *Angenommen,*

$$\mathcal{N}^u = \bigcup_{p \in \mathcal{W}^u} \mathcal{F}_0^u(p), \quad \mathcal{N}^s = \bigcup_{p \in \mathcal{W}^s} \mathcal{F}_0^s(p)$$

schneiden sich transversal entlang eines singulären homoklinen Orbits. Dann existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ in (2.1) ein transversaler homokliner Orbit zu \mathcal{N}_ε existiert.

2.3 Fenichel-Normalform und Shilnikov-Koordinaten

In der Nähe einer langsamen Mannigfaltigkeit M_ε lassen sich mit Hilfe der schnell-langsamen Struktur Koordinaten definieren, in denen $W^s(M_\varepsilon)$ und $W^u(M_\varepsilon)$ als Ebenen gegeben sind. Diese Koordinatentransformation geht auch auf Fenichel [12] zurück und wurde in [19] weiter entwickelt. In dieser Arbeit wird lediglich eine einfache, in [22] beschriebene Variante dieser *Fenichel-Koordinaten* benötigt (allgemeinere Formen finden sich in [19] und [21]).

O. B. d. A. sei die Funktion h^0 in (H3) gegeben durch $h^0(y) = 0$ für alle $y \in K$. Nach (H2) ist für jedes $y \in K$ die Dimension der stabilen Faser $\mathcal{F}_0^s(y)$ gleich k^s , die der instabilen Faser $\mathcal{F}_0^u(y)$ gleich k^u , wobei $k^s + k^u = k$. Da K nach Annahme einfach zusammenhängend ist, kann man Basen von $\mathcal{F}_0^s(y)$ und $\mathcal{F}_0^u(y)$ wählen, die regulär von y abhängen und zusammen eine Basis des \mathbb{R}^k bilden. In dieser Basis sei x gegeben als $x = (a, b) \in \mathbb{R}^{k^s+k^u}$. Die stabile Mannigfaltigkeit von M_0 ist damit gleich der $\{b = 0\}$ -Ebene, die instabile gleich der $\{a = 0\}$ -Ebene. Das Schichtproblem (2.3) ist auf $\{(a, b, y) : y \in K, |a|, |b| \leq \Delta\}$, $\Delta > 0$ hinreichend klein, dann gegeben als

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \Lambda^s(a, b, y)a \\ \dot{b} &= \Lambda^u(a, b, y)b \\ \dot{y} &= 0.\end{aligned}$$

Dabei sind Λ^s und Λ^u Matrix-wertige Funktionen. Wegen der normalen Hyperbolizität von M_0 existieren für hinreichend kleines $\Delta > 0$ Konstanten $\lambda^s < 0 < \lambda^u$, so dass $\operatorname{Re} \lambda < \lambda^s$ für alle Eigenwerte λ von $\Lambda^s(a, b, y)$ und $\operatorname{Re} \lambda > \lambda^u$ für alle Eigenwerte von $\Lambda^u(a, b, y)$.

Dieses Koordinatensystem besitzt gewissermaßen eine Fortsetzung für $\varepsilon > 0$, d. h. es existieren Koordinaten (a, b, y) , in denen die stabilen Fasern $\mathcal{F}_\varepsilon^s(y)$ durch die Mannigfaltigkeit $\{b = 0\}$, die instabilen Fasern $\mathcal{F}_\varepsilon^u(y)$ durch $\{a = 0\}$ gegeben sind. Der Übergang zu diesen Koordinaten ist regulär, $a = a(x, y, \varepsilon)$ und $b = b(x, y, \varepsilon)$ sind also glatte Funktionen mit $a, b = \mathcal{O}(\varepsilon)$, wodurch die Ebenen $\{a = 0\}$ und $\{b = 0\}$ für $\varepsilon > 0$ entsprechend nahe bei den ungestörten Mannigfaltigkeiten liegen. Die (a, b, y) -Koordinaten heißen *Fenichel-Koordinaten*. In diesen Koordinaten ist (2.1) in einer Umgebung von M_ε gegeben als

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \Lambda^s(a, b, y, \varepsilon)a \\ \dot{b} &= \Lambda^u(a, b, y, \varepsilon)b \\ \dot{y} &= \varepsilon m(y, \varepsilon) + \varepsilon H(a, b, y, \varepsilon)ab,\end{aligned}\tag{2.11}$$

wobei m eine glatte Funktion ist, die den langsamen Fluss beschreibt, und H im Allgemeinen ein Tensor dritter Stufe ist (vgl. [22]). Rektifiziert man zusätzlich den Fluss

auf M_ε (möglicherweise in mehreren Karten), so lässt sich (2.11) schreiben als

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \Lambda^s(a, b, y, \varepsilon)a \\ \dot{b} &= \Lambda^u(a, b, y, \varepsilon)b \\ \dot{y} &= \varepsilon(U + H(a, b, y, \varepsilon)ab)\end{aligned}\tag{2.12}$$

mit $U = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Die Transformation auf diese *Fenichel-Normalform* von (2.1) bildet die Grundlage des Exchange Lemmas in [19] und [22] und ermöglicht es (besonders durch das Produkt ab in der dritten Gleichung), invariante Mannigfaltigkeiten zu verfolgen, während sie eine Umgebung von M_ε passieren. Die Zeit dieser Passage muss dabei allerdings von der Größenordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ sein.

Auch für die *Shilnikov-Koordinaten* ist die Fenichel-Normalform der Ausgangspunkt. Es sei ein System der Gestalt

$$\begin{aligned}x' &= -A^s(x, y, z, \varepsilon)x \\ y' &= A^u(x, y, z, \varepsilon)y \\ z' &= \varepsilon(U + B(x, y, z, \varepsilon)xy)\end{aligned}\tag{2.13}$$

gegeben, wobei $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $U = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Die Funktionen A^s und A^u seien gleichmäßig positiv, $A^s, A^u > \rho > 0$. Die rechte Seite von (2.13) sei C^{k+1} in $(x, y, z, \varepsilon, \lambda)$, $k \geq 0$, mit einem mehrdimensionalen Parameter λ . Dies ist die für die FitzHugh-Nagumo-Gleichungen relevante Form.

Wir setzen $\Sigma_1 := \{(x, y, z) : x = \Delta\}$ und $\Sigma_2 := \{(x, y, z) : y = \Delta\}$ mit einem hinreichend kleinen $\Delta > 0$. Das *Shilnikov-Problem* zu (2.13) besteht darin, eine Lösung $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ der Gleichung zu bestimmen, die zu einem gegebenen $T > 0$ die Bedingungen

$$p(0) \in \Sigma_1, \quad p(T) \in \Sigma_2$$

erfüllt (vgl. [5]). Ist $p \in \Sigma_1$ und $p(t)$ Lösung von (2.13) mit $p(0) = p$, so sei $\tilde{p} \in \Sigma_2$ gegeben als $p(t_0) = \tilde{p}$, wobei $p(t) \notin \Sigma_2$ für alle $0 \leq t < t_0$. Die Abbildung

$$\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2, \quad \Pi(p) = \tilde{p}$$

ist also eine Art Poincaré-Abbildung von Σ_1 nach Σ_2 . Sie wird auch als *first hit map* bezeichnet. Der folgende Satz, der das technische Hauptergebnis in [25] darstellt, liefert die wichtigen Informationen über diese Abbildung Π und damit über den Fluss in der Nähe einer langsamen Mannigfaltigkeit.

Satz 2.8 ([25]) *Sei $\Delta > 0$ fest gewählt und klein. Zu jedem hinreichend großen T , jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ und jedem $z \in \mathbb{R}$ existiert eine eindeutige Lösung $p(t)$ von (2.13) mit*

$$\begin{aligned}p(0) &= (\Delta, a_1 e^{-\alpha_u^* T}, z) + \mathcal{O}(e^{-\alpha^* T}(0, e^{-\alpha_u^* T}, 0)), \\ p(T) &= (a_2 e^{-\alpha_s^* T}, \Delta, z + \varepsilon T U) + \mathcal{O}(e^{-\alpha^* T}(e^{-\alpha_s^* T}, 0, \varepsilon)).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Dabei sind $a_1, a_2, \alpha_u^*, \alpha_s^*$ positive, C^k -reguläre Funktionen von $(T, \varepsilon, \lambda, z)$ und α^* ist eine positive Konstante.

Für $\nu_j \in \{T, \varepsilon, \lambda, z\}$, $j = 1, \dots, l$, $l \leq k$, gilt ferner

$$\begin{aligned} D_{\nu_1 \dots \nu_l} p(0) &= D_{\nu_1 \dots \nu_l} (\Delta, a_1 e^{-\alpha_u^* T}, z) + \mathcal{O}(e^{-\alpha^* T}(0, e^{-\alpha_u^* T}, 0)), \\ D_{\nu_1 \dots \nu_l} p(T) &= D_{\nu_1 \dots \nu_l} (a_2 e^{-\alpha_s^* T}, \Delta, z + \varepsilon T U) + \mathcal{O}(e^{-\alpha^* T}(e^{-\alpha_s^* T}, 0, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Zu jedem Anfangswert $(\Delta, y, z) \in \Sigma_1$ mit $|y|$ hinreichend klein kann man nun – bis auf einen Fehler höherer exponentieller Ordnung – den Punkt bestimmen, in dem die entsprechende Lösung Σ_2 passiert. Die *Shilnikov-Koordinaten* $(T, \varepsilon, \lambda, z)$ liefern also eine Näherung in erster Ordnung der Abbildung Π , was das Verfolgen von Lösungen und invarianten Mannigfaltigkeiten in der Nähe von M_ε erheblich erleichtert. Die Transitzeit T von Σ_1 nach Σ_2 muss dabei nicht wie im Fall des Exchange Lemmas $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ sein. Vielmehr ist es möglich, das Exchange Lemma selbst aus den Shilnikov-Koordinaten herzuleiten (vgl. [25]).

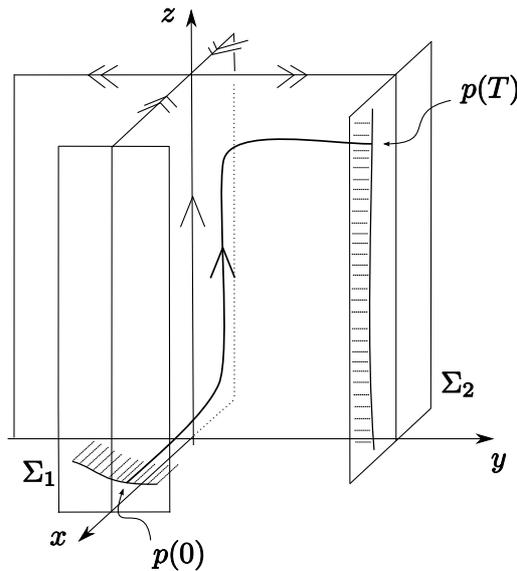


Abbildung 2.3: Shilnikov-Koordinaten

2.4 Melnikov-Integrale

Melnikov-Integrale werden in dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sein. Um den geometrischen Hintergrund hierfür in kurzer Form zusammenzufassen (eine ausführlichere Darstellung findet sich etwa in [33]), sei das System

$$\dot{u} = F(u, \eta) \tag{2.15}$$

mit $u \in \mathbb{R}^m$ gegeben, das glatt von einem Parameter $\eta \in \mathbb{R}$ abhängt. Es seien u_1 und u_2 hyperbolische Fixpunkte von (2.15), die bei $\eta = 0$ durch einen heteroklinen Orbit $u(t)$ verbunden werden. Dabei sei der Schnitt der Tangentialräume von $W^u(u_1)$ und $W^s(u_2)$ entlang $u(t)$ eindimensional. Das zugehörige adjungierte Problem

$$\dot{\psi} = -D_u F(u(t), 0)^T \psi$$

besitzt dann eine beschränkte Lösung ψ , die senkrecht auf $T_{u(t)}W^u(u_1)$ und $T_{u(t)}W^s(u_2)$ steht.

Es seien ferner $h_\eta^-(t)$ und $h_\eta^+(t)$ die Lösungen von (2.15) mit

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h_\eta^-(t) = u_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} h_\eta^+(t) = u_2,$$

die sich für $\eta = 0$ zum heteroklinen Orbit $u(t)$ verbinden,

$$h_0^-(t) = h_0^+(t) = u(t).$$

Damit sind $h_\eta^-(0) \in W^u(u_1)$ und $h_\eta^+(0) \in W^s(u_2)$ und durch

$$d(\eta) := \psi(0) \cdot (h_\eta^-(0) - h_\eta^+(0))$$

ist ein signierter Abstand zwischen $W^u(u_1)$ und $W^s(u_2)$ definiert.

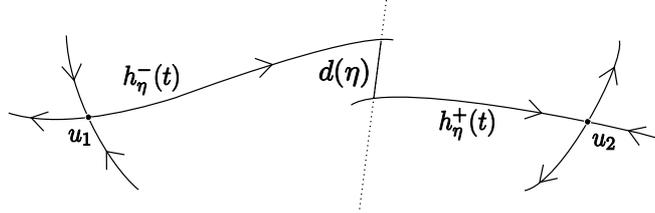


Abbildung 2.4: Abstand zwischen $W^u(u_1)$ und $W^s(u_2)$ in einem ebenen System

Da $W^u(u_1)$ und $W^s(u_2)$ glatt von η abhängen, hängt auch $d(\eta)$ glatt von η ab. Mit $d(0) = 0$ liefert eine Taylor-Entwicklung

$$d(\eta) = \eta \psi(0) \cdot \frac{d}{d\eta} [h_\eta^-(0) - h_\eta^+(0)]_{\eta=0} + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Man kann nun zeigen, dass

$$\psi(0) \cdot \frac{d}{d\eta} [h_\eta^-(0) - h_\eta^+(0)]_{\eta=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} D_\eta F(u(t), 0) \cdot \psi(t) dt,$$

so dass

$$d(\eta) = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} D_\eta F(u(t), 0) \cdot \psi(t) dt + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Das Melnikov-Integral

$$M := \int_{-\infty}^{+\infty} D_\eta F(u(t), 0) \cdot \psi(t) dt$$

misst also den Abstand von $W^u(u_1)$ und $W^s(u_2)$ in erster Ordnung in η in $\psi(0)$ -Richtung [26].

3 Stabilität und Evans-Funktion

3.1 Stabilität von Travelling Waves

Gegeben sei ein System der Gestalt

$$U_t = DU_{xx} + F(U) \tag{3.1}$$

mit $U \in \mathbb{R}^n$, $x, t \in \mathbb{R}$ und der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 1$. $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine C^2 -Funktion mit beschränkten Ableitungen.

Das System (3.1) besteht aus einer semilinearen parabolischen partiellen Differentialgleichung, gekoppelt mit $n - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen und hat damit die Struktur der von Evans untersuchten *nerve axon equations* [7–10]. Zu dieser Klasse gehören die FitzHugh-Nagumo-Gleichungen (1.1), die Nagumo-Gleichung (1.4) sowie die von Hodgkin und Huxley formulierten Gleichungen [17]. Eine Darstellung zur Stabilität von Travelling Waves in allgemeineren Evolutionsgleichungen bietet der Übersichtsartikel von Sandstede [30], dem ich auch mehrere der folgenden Resultate entnommen habe.

Eine Travelling Wave ist eine spezielle Lösung von (3.1), die mit einem $c \in \mathbb{R}$ nur von $\xi = x + ct$ abhängt,

$$U(x, t) = \bar{U}(\xi)$$

(üblicherweise sucht man Lösungen, die von der Variable $x - ct$ abhängen, doch ist $\xi = x + ct$ im Fall der FitzHugh-Nagumo-Gleichungen geeigneter). Eine solche Lösung \bar{U} bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit c , ohne dabei aber ihr charakteristisches Profil zu ändern. Anhand dieses Profils lassen sich verschiedene Typen von Travelling Waves unterscheiden, etwa *Fronten* und *Pulse*. Eine Front ist eine Travelling Wave $\bar{U}(\xi)$, die zwei Ruhezustände von (3.1) miteinander verbindet, d.h. es existieren $U_{\pm} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\bar{U}(\xi) \rightarrow U_{\pm} \quad \text{für } \xi \rightarrow \pm\infty$$

und $F(U_{\pm}) = 0$. Ist $U_- = U_+$, so nennt man $\bar{U}(\xi)$ einen Puls.

Durch den Ansatz $U(x, t) = \bar{U}(\xi)$ wird aus (3.1) eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$c\bar{U}_{\xi} = D\bar{U}_{\xi\xi} + F(\bar{U}), \tag{3.2}$$

deren beschränkte Lösungen Travelling Waves von (3.1) sind. Die heteroklinen und homoklinen Orbits der Profildifferentialgleichung (3.2) liefern die Fronten und Pulse von (3.1). Alternativ kann man (3.1) auf die Koordinaten $(\xi, t) = (x + ct, t)$ transformieren, in denen (3.1) gegeben ist als

$$U_t = DU_{\xi\xi} - cU_{\xi} + F(U). \quad (3.3)$$

Wir beschränken uns hier auf solche Lösungen $U(\xi, t)$ von (3.3), die als Funktion von ξ im Raum

$$C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ ist stetig und gleichmäßig beschränkt.}\}$$

liegen. Dieser bildet mit der Supremumsnorm einen Banachraum. Die rechte Seite von (3.3) definiert dann einen nichtlinearen Operator

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathcal{F}) \subset C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

mit $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = C_{\text{unif}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, so dass wir (3.3) schreiben können als

$$U_t = \mathcal{F}(U). \quad (3.4)$$

Die Travelling Waves \bar{U} von (3.1) sind genau die Lösungen der Gleichung

$$0 = \mathcal{F}(\bar{U}), \quad (3.5)$$

also die stationären Punkte von (3.4): Statt \bar{U} bewegt sich nun das Koordinatensystem mit Geschwindigkeit c . Die (ξ, t) -Koordinaten werden daher auch als mitbewegte Koordinaten oder *moving frame* bezeichnet. Aus (3.5) folgt desweiteren, dass zu jeder Travelling Wave \bar{U} von (3.1) auch $\bar{U}(\cdot + k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ eine Travelling Wave von (3.1) ist, also eine durch k parametrisierte Schar von Travelling Waves existiert.

Die Betrachtung von Travelling Waves als Fixpunkte von (3.4) führt unmittelbar auf die Frage der Stabilität.

Definition 3.1 *Eine Travelling Wave \bar{U} heißt stabil bezüglich (3.4), wenn eine Umgebung N von \bar{U} in $C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ existiert, so dass zu einer Lösung $U(\xi, t)$ von (3.4) mit Anfangswert $U(\xi, 0) \in N$ ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$\|U(\xi, t) - \bar{U}(\xi + k)\|_{\infty} \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow +\infty$. Ansonsten nennt man \bar{U} instabil.

Eine Travelling Wave \bar{U} ist damit stabil, wenn jede Lösung von (3.4), deren Anfangswert bezüglich der Supremumsnorm nahe genug bei \bar{U} liegt, für $t \rightarrow +\infty$ gegen eine verschobene Travelling Wave $\bar{U}(\cdot + k)$ konvergiert.

Im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung auf dem \mathbb{R}^m oder dem \mathbb{C}^m lässt sich die

Stabilität eines hyperbolischen Fixpunkts allein durch die Eigenwerte der Linearisierung charakterisieren. Für die Stabilität einer Travelling Wave im Sinne von Definition 3.1 ist ein ähnliches Vorgehen möglich.

Die Linearisierung von (3.3) um den Fixpunkt \bar{U} ist für $P \in C_{\text{unif}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gegeben als

$$P_t = \frac{\partial}{\partial U} \mathcal{F}(\bar{U})P = DP_{\xi\xi} - cP_{\xi} + \frac{\partial}{\partial U} F(\bar{U}(\xi))P, \quad (3.6)$$

wobei $\frac{\partial}{\partial U} \mathcal{F}$ die Fréchet-Ableitung des Operators \mathcal{F} und $\frac{\partial}{\partial U} F$ die Jacobi-Matrix von F bezeichne. Wir nutzen die rechte Seite von (3.6) und definieren den Operator

$$L : \mathcal{D}(L) \subset C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \rightarrow C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$$

als

$$LP = DP_{\xi\xi} - cP_{\xi} + DF(\phi(\xi))P.$$

Da $\mathcal{D}(L) = C_{\text{unif}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, ist L ein dicht definierter linearer Operator auf $C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. L ist die Komplexifizierung der Linearisierung, d. h. für $P \in C_{\text{unif}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist

$$LP = \frac{\partial}{\partial U} \mathcal{F}(\bar{U})P.$$

Die Stabilität von \bar{U} hängt nun davon ab, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung (3.6) eine Lösung der Form $P(\xi, t) = e^{\lambda t}P(\xi)$ besitzt. Dieser Ansatz führt, in (3.6) eingesetzt, zum Eigenwertproblem $\lambda P = LP$ und somit zur Betrachtung des Spektrum $\sigma(L)$ von L .

Hierzu definieren wir die Resolventenmenge von L wie üblich als

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (L - \lambda I)^{-1} \text{ ist beschränkter linearer Operator.}\}$$

und unterteilen das Spektrum $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$ in Punktspektrum $\sigma_p(L)$ und wesentliches Spektrum $\sigma_{\text{ess}}(L)$:

$$\begin{aligned} \sigma_p(L) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist isolierter Eigenwert von } L \text{ mit endlicher Vielfachheit.}\}, \\ \sigma_{\text{ess}}(L) &:= \sigma(L) \setminus \sigma_p(L). \end{aligned}$$

Die Ableitung \bar{U}' der Travelling Wave löst (3.6) und ist somit Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = 0$, wodurch stets $0 \in \sigma(L)$.

Der Zusammenhang zwischen der Stabilität von \bar{U} und dem Spektrum von L ist nun wie folgt:

Satz 3.2 *Die Travelling Wave \bar{U} ist genau dann stabil im Sinne von Definition 3.1, wenn*

(i) *ein $\beta < 0$ existiert mit*

$$\sigma(L) \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < \beta\},$$

(ii) 0 ist einfacher Eigenwert von L .

Die Aussage von Satz 3.2 folgt aus dem Theorem in [7] zusammen mit Theorem 1 in [9].

Besitzt der Operator L die in Satz 3.2 genannten Eigenschaften, so nennt man \bar{U} *linear* oder *spektral* stabil. Die Stabilität im Sinne der Definition 3.1 bezeichnet man entsprechend auch als *nichtlineare* Stabilität. Die Aussage von Satz 3.2 ist also, dass für Gleichungen der Form (3.1) eine Travelling Wave \bar{U} genau dann nichtlinear stabil ist, wenn \bar{U} linear stabil ist. Für den Zusammenhang zwischen linearer und nichtlinearer Stabilität im Fall von Travelling Waves anderer Evolutionsgleichungen sei noch einmal auf [30] verwiesen.

3.2 Konstruktion der Evans-Funktion

Es sei $\bar{U}(\xi)$ eine Front oder ein Puls von (3.1) mit Geschwindigkeit $c = c_0$ und es gelte folgende Annahme

(A1) Es existieren $C, \alpha > 0$ und $U_{\pm} \in \mathbb{R}^n$ mit $F(U_{\pm}) = 0$ und

$$\begin{aligned} |\bar{U}(\xi) - U_-| &\leq C e^{\alpha\xi} && \text{für } \xi < 0, \\ |\bar{U}(\xi) - U_+| &\leq C e^{-\alpha\xi} && \text{für } \xi > 0, \\ |\bar{U}'(\xi)| &\leq C e^{-\alpha|\xi|} && \text{für } \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Profilleichung (3.2) sei als System erster Ordnung gegeben als

$$u' = f(u, c) \tag{3.7}$$

mit $u \in \mathbb{R}^N$, $N = n + 1$ und $' = \frac{d}{d\xi}$ (im Fall $n > 1$ muss dabei $c \neq 0$ angenommen werden). Den \bar{U} entsprechenden heteroklinen oder homoklinen Orbit dieser Gleichung bezeichnen wir mit \bar{u} . Auch das Eigenwertproblem

$$(L - \lambda I)P = 0$$

schreiben wir als System erster Ordnung,

$$W' = \mathbb{A}(\xi, \lambda)W, \tag{3.8}$$

wobei $\mathbb{A}(\xi, \lambda) = \partial_u f(\bar{u}(\xi), c) + \lambda B$ mit einer geeigneten Matrix $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Nach Annahme (A1) ist (3.8) asymptotisch autonom als

$$W' = \mathbb{A}_{\pm}(\lambda)W$$

mit Endmatrizen

$$\mathbb{A}_{\pm}(\lambda) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbb{A}(\xi, \lambda).$$

Die Eigenwerte dieser Endmatrizen spielen nun eine wesentliche Rolle. Wir setzen das Folgende voraus:

(A2) $\Omega \subset \mathbb{C}$ ist ein zusammenhängendes Gebiet mit $\{\operatorname{Re} \lambda > \vartheta\} \subset \Omega$ für ein $\vartheta < 0$ und es existiert eine Zahl k , so dass die Endmatrizen $\mathbb{A}_{\pm}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$ genau k Eigenwerte mit positivem Realteil und $N - k$ Eigenwerte mit negativem Realteil besitzen. Dies bedeutet insbesondere, dass $\mathbb{A}_{\pm}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$ hyperbolisch sind.

Diese Annahme an die Endmatrizen $\mathbb{A}_{\pm}(\lambda)$ hat die Konsequenz, dass Ω entweder ganz im wesentlichen Spektrum liegt oder in Ω nur isolierte Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit liegen [1, 16]. Wir nehmen hier an, dass das wesentliche Spektrum in der linken Halbebene liegt und dass somit die letztere der beiden Möglichkeiten gilt, also

$$\sigma(L) \cap \Omega \subset \sigma_p(L).$$

Ist zusätzlich $\lambda = 0$ einfacher Eigenwert, kann eine Instabilität der Welle \bar{U} nur noch durch einen Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(L)$ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ verursacht werden und entscheidend für die Stabilität ist dadurch die Lage des Punktspektrums in Ω .

Der lineare Operator L besitzt einen Eigenwert $\lambda \in \Omega$ genau dann, wenn eine beschränkte Lösung $W(\xi, \lambda)$ von (3.8) existiert. Aus der Annahme (A1) folgt, dass $\mathbb{A}(\xi, \lambda)$ für $\xi \rightarrow \pm\infty$ mit exponentieller Rate gegen die Endmatrizen $\mathbb{A}_{\pm}(\lambda)$ konvergiert. Eine Lösung $W(\xi, \lambda)$ ist daher nur dann für alle $\xi \in \mathbb{R}$ beschränkt, wenn sie für $\xi \rightarrow -\infty$ asymptotisch zum instabilen Eigenraum $U_-(\lambda)$ von $\mathbb{A}_-(\lambda)$ und für $\xi \rightarrow +\infty$ asymptotisch zum stabilen Eigenraum $S_+(\lambda)$ von $\mathbb{A}_+(\lambda)$ ist. Damit muss jede Eigenfunktion $W(\xi, \lambda)$ aber exponentiell abklingen [1]. Mithin ist $W(\xi, \lambda)$ Eigenfunktion zu λ genau dann, wenn

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} W(\xi, \lambda) = 0.$$

Damit können die Eigenfunktionen von L wie folgt charakterisiert werden. Zu $Y \in \mathbb{C}^N$ bezeichne $Y(\xi, \lambda)$ die Lösung von (3.8) mit $Y(0, \lambda) = Y$. Wir setzen

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= \{Y \in \mathbb{C}^N : Y(\xi, \lambda) \rightarrow 0 \text{ für } \xi \rightarrow -\infty\}, \\ S(\lambda) &= \{Y \in \mathbb{C}^N : Y(\xi, \lambda) \rightarrow 0 \text{ für } \xi \rightarrow +\infty\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Der Raum $U(\lambda)$ besteht also aus allen Anfangswerten, deren zugehörige Lösungen von (3.8) links abklingen, $S(\lambda)$ besteht aus allen Anfangswerten, deren zugehörige Lösungen rechts abklingen. Nach der obigen Überlegung ist $\lambda \in \Omega$ genau dann Eigenwert von L , wenn eine nichttriviale Lösung $Y(\xi, \lambda)$ von (3.8) existiert, die links und rechts abklingt, also genau dann, wenn

$$U(\lambda) \cap S(\lambda) \neq \{0\}.$$

Hier kommt nun die Evans-Funktion $D(\lambda)$ ins Spiel. Sie soll als eine auf Ω analytische Funktion definiert werden und genau dann in einem $\lambda \in \Omega$ verschwinden, wenn $U(\lambda) \cap S(\lambda) \neq \{0\}$. Diese Idee kann auf unterschiedliche Arten realisiert werden (vgl. etwa [1, 15, 20, 29]). Eine Möglichkeit ist es, $D(\lambda)$ mit Hilfe der exponentiellen Dichotomien von (3.8) zu definieren [4, 30].

Es sei $\Phi(\xi, \zeta) : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ der Lösungsoperator von (3.8), d. h. für $\xi, \zeta, \tau \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(\xi, \xi) = I, \quad \Phi(\xi, \tau)\Phi(\tau, \zeta) = \Phi(\xi, \zeta)$$

und für $Y \in \mathbb{C}^N$ ist $Y(\xi) = \Phi(\xi, \zeta)Y$ Lösung von (3.8) mit $Y(\zeta) = Y$. Der Operator $\Phi(\xi, \zeta)$ hängt dabei von λ ab, $\Phi(\xi, \zeta) = \Phi(\xi, \zeta, \lambda)$.

Definition 3.3 *Es sei $J = \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ oder \mathbb{R} und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sei fest gewählt. Man sagt, dass (3.8) auf J eine exponentielle Dichotomie zu $\lambda = \lambda_0$ besitzt, falls Konstanten $K > 0$ und $\kappa^s < 0 < \kappa^u$ sowie eine stetige Schar $\{P(\xi) : \xi \in J\}$ von Projektionen existieren, so dass für $\xi, \zeta \in J$ gilt*

(i) Setze $\Phi^s(\xi, \zeta) := \Phi(\xi, \zeta)P(\zeta)$. Für alle $\xi, \zeta \in J$ mit $\xi \geq \zeta$ ist dann

$$|\Phi^s(\xi, \zeta)| \leq Ke^{\kappa^s(\xi-\zeta)}.$$

(ii) Setze $\Phi^u(\xi, \zeta) := \Phi(\xi, \zeta)(I - P(\zeta))$. Für alle $\xi, \zeta \in J$ mit $\xi \leq \zeta$ ist dann

$$|\Phi^u(\xi, \zeta)| \leq Ke^{\kappa^u(\xi-\zeta)}.$$

(iii) Die Projektionen und die Lösungsoperatoren kommutieren,

$$\Phi(\xi, \zeta)P(\zeta) = P(\xi)\Phi(\xi, \zeta),$$

so dass für $Y \in \mathbb{C}^N$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi^s(\xi, \zeta)Y &\in R(P(\xi)) \quad \text{für } \xi, \zeta \in J \text{ mit } \xi \geq \zeta, \\ \Phi^u(\xi, \zeta)Y &\in N(P(\xi)) \quad \text{für } \xi, \zeta \in J \text{ mit } \xi \leq \zeta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dabei bezeichne $R(P(\xi))$ das Bild, $N(P(\xi))$ den Kern der Projektion $P(\xi)$. Die von ξ unabhängige Dimension von $N(P(\xi))$ heißt Morse-Index der exponentiellen Dichotomie auf J . Falls (3.8) bei $\lambda = \lambda_0$ exponentielle Dichotomien auf \mathbb{R}^- und \mathbb{R}^+ besitzt, so bezeichnet man die zugehörigen Morse-Indizes mit $i_-(\lambda_0)$ bzw. $i_+(\lambda_0)$.

Da die Endmatrizen $\mathbb{A}_\pm(\lambda)$ hyperbolisch sind, besitzt das Eigenwertproblem (3.8) für $\lambda \in \Omega$ auf \mathbb{R}^- und \mathbb{R}^+ exponentielle Dichotomien [30]. Dabei gilt $i_-(\lambda) = \dim U_-(\lambda) = k$, $i_+(\lambda) = \dim S_+(\lambda) = N - k$. Bezeichnen $P_-(\xi, \lambda)$ und $P_+(\xi, \lambda)$ die zugehörigen Projektionen im Sinne der Definition 3.3, so sind die Räume $U(\lambda)$ und $S(\lambda)$ aus (3.9) nun gegeben als

$$U(\lambda) = N(P_-(0, \lambda)), \quad S(\lambda) = R(P_+(0, \lambda))$$

und für alle $\lambda \in \Omega$ gilt $\dim U(\lambda) = k$ und $\dim S(\lambda) = N - k$. Wir wählen Basisvektoren $Y_1^u(\lambda), \dots, Y_k^u(\lambda)$ von $U(\lambda)$ und $Y_1^s(\lambda), \dots, Y_{N-k}^s(\lambda)$ von $S(\lambda)$. Die Basisvektoren $Y_i^u(\lambda)$ und $Y_j^s(\lambda)$ können dabei so gewählt werden, dass sie auf Ω analytisch von λ abhängen [23, 30].

Definition 3.4 Die Evans-Funktion ist für $\lambda \in \Omega$ definiert als

$$D(\lambda) = \det [Y_1^u(\lambda), \dots, Y_k^u(\lambda), Y_1^s(\lambda), \dots, Y_{N-k}^s(\lambda)].$$

Diese Definition von D ist offensichtlich nicht eindeutig, sondern hängt von der speziellen Wahl und Orientierung der Basen $\{Y_i^u(\lambda)\}$ und $\{Y_j^s(\lambda)\}$ ab. Wählt man jedoch andere Basen oder eine andere Orientierung, so unterscheidet sich die so gebildete Evans-Funktion von D nur durch die Multiplikation mit einem nichtverschwindenden Faktor, der aus den Determinanten der Basiswechsel entsteht. Auch die Konstruktion einer eindeutigen Evans-Funktion ist möglich und wird in [15] beschrieben.

Lemma 3.5 Die Evans-Funktion $D : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist analytisch und es gilt

- (i) $D(\lambda) = 0$ genau dann, wenn λ Eigenwert von L ist.
- (ii) $D(0) = 0$.
- (iii) $D(\lambda)$ ist reell für $\lambda \in \Omega \cap \mathbb{R}$.
- (iv) Die Ordnung einer Nullstelle λ von D ist gleich der algebraischen Vielfachheit von λ als Eigenwert von L .

Die Analytizität von D ergibt sich dabei aus der Analytizität der Vektoren $Y_i^u(\lambda)$ und $Y_j^s(\lambda)$. Eigenschaft (i) folgt aus der Konstruktion von D : Es ist $D(\lambda) = 0$ genau dann, wenn sich $U(\lambda)$ und $S(\lambda)$ nichttrivial schneiden – also genau dann, wenn λ Eigenwert ist. Da \bar{u}' Eigenfunktion zu $\lambda = 0$ ist, folgt hieraus (ii). Die Matrix $\mathbb{A}(\xi, \lambda)$ ist reell für reelle λ und man kann somit reelle Lösungen $Y_i^u(\xi, \lambda)$, $Y_j^s(\xi, \lambda)$ beziehungsweise reelle Basisvektoren $Y_i^u(\lambda)$, $Y_j^s(\lambda)$ wählen, also gilt (iii). Die Eigenschaft (iv) wird in [10] gezeigt.

Mit Hilfe der Evans-Funktion kann Satz 3.2 unter den Annahmen dieses Abschnitts alternativ formuliert werden als

Lemma 3.6 Die Travelling Wave \bar{U} ist stabil, falls $\lambda = 0$ einfache Nullstelle von D ist und $D(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \Omega$ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Die Stabilität von \bar{U} wird also nun allein durch die Lage der Nullstellen von D entschieden.

3.3 Ein Kriterium für Instabilität

In der Regel kann man die Evans-Funktion für eine gegebene Travelling Wave nicht explizit berechnen und man benötigt indirekte Argumente, um die Nullstellen von $D(\lambda)$ in der rechten Halbebene zu lokalisieren. Eine Möglichkeit ist, die Ableitung von $D(\lambda)$ in $\lambda = 0$ mit dem Verhalten von $D(\lambda)$ für große reelle $\lambda \in \Omega$ zu vergleichen, um daraus

auf die Existenz einer reellen Nullstelle $\lambda > 0$ zu schließen (für $\lambda \in \Omega \cap \mathbb{R}$ ist $D(\lambda)$ reell). Ausgangspunkt für diese Methode ist die Tatsache, dass für λ hinreichend groß $D(\lambda)$ nicht verschindet, λ also kein Eigenwert ist. Das Vorzeichen

$$\operatorname{sgn} D(+\infty) := \operatorname{sgn} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} D(\lambda)$$

lässt sich dabei relativ leicht bestimmen [1,10]. Ist nun etwa $D'(0) < 0$, aber $D(+\infty) > 0$, so folgt daraus wegen $D(0) = 0$, dass mindestens ein $\lambda > 0$ mit $D(\lambda) = 0$ existieren muss. In diesem Fall wäre die Travelling Wave also instabil. Mit der analogen Überlegung für $D'(0) > 0$ und $D(+\infty) < 0$ liefert dies ein Kriterium für die Instabilität.

Lemma 3.7 *Ist $D'(0)D(+\infty) < 0$, so ist \bar{U} instabil.*

Genau genommen folgt aus $D'(0)D(+\infty) < 0$, dass die Anzahl der reellen Nullstellen $\lambda > 0$ ungerade ist. Dieses Argument spielt nicht nur eine wichtige Rolle für die Stabilitätsanalyse in [20], sondern kann für die Behandlung unterschiedlicher Gleichungen nutzbar gemacht werden, wie etwa für den Fall viskoser Profile in [15].

Im Folgenden werde ich eine gut handhabbare Formel zur Berechnung von $D'(0) = \frac{d}{d\lambda} D(\lambda)|_{\lambda=0}$ herleiten, die ohne Beweis in [30] angegeben wird.

Es seien $Y_1^u(\lambda), \dots, Y_k^u(\lambda)$ und $Y_1^s(\lambda), \dots, Y_{N-k}^s(\lambda)$ Basisvektoren von $U(\lambda)$ beziehungsweise $S(\lambda)$, so dass

$$Y_1^u(0) = Y_1^s(0) = \bar{u}'(0).$$

Desweiteren sei

$$\dim U(0) \cap S(0) = 1, \tag{3.11}$$

d. h. bis auf Multiplikation mit einer Konstanten ist $\bar{u}'(\xi)$ die einzige Eigenfunktion zu $\lambda = 0$. Die adjungierte Gleichung

$$\psi' = -\mathbb{A}(\xi, 0)^* \psi = -\mathbb{A}(\xi, 0)^T \psi \tag{3.12}$$

besitzt unter dieser Annahme eine bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutige beschränkte Lösung $\psi(\xi)$, die für $\xi \rightarrow \pm\infty$ exponentiell abklingt [30].

Für eine Lösung $Y(\xi)$ von (3.8) mit $\lambda = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} (Y(\xi) \cdot \psi(\xi)) &= Y'(\xi) \cdot \psi(\xi) + Y(\xi) \cdot \psi'(\xi) \\ &= \mathbb{A}(\xi, 0)Y(\xi) \cdot \psi(\xi) - Y(\xi) \cdot \mathbb{A}(\xi, 0)^* \psi(\xi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ist also $Y(\xi)$ für $\xi \rightarrow -\infty$ oder $\xi \rightarrow +\infty$ beschränkt, so ist

$$Y(\xi) \cdot \psi(\xi) = 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Insbesondere steht $\psi(0)$ senkrecht auf den Basisvektoren $Y_i^u(0)$ und $Y_j^s(0)$.

Im Folgenden wird zusätzlich die Identität

$$\partial_c f(\bar{u}(\xi), c_0) = B\bar{u}'(\xi) \quad (3.13)$$

aus [30] verwendet, die eine Beziehung zwischen der rechten Seite f von (3.7) und der Matrix $\mathbb{A}(\xi, \lambda) = \partial_u f(\bar{u}(\xi), c_0) + \lambda B$ aus (3.8) herstellt.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Lemma 3.8

$$\begin{aligned} D'(0) &= \frac{1}{|\psi(0)|^2} \det [\psi(0), Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), \bar{u}'(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0)] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} D_c f(\bar{u}(\xi), c_0) \cdot \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Beweis Aufgrund der Identität $Y_1^u(0) = Y_1^s(0)$ folgt aus der Formel für die Ableitung einer Determinante

$$\begin{aligned} D'(0) &= \det \left[\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0), Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), Y_1^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right] \\ &\quad + \det \left[Y_1^u(0), \dots, Y_k^u(0), \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right] \\ &= \det \left[\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0), Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), Y_1^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right] \\ &\quad - \det \left[\frac{dY_1^s}{d\lambda}(0), \dots, Y_k^u(0), Y_1^u(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right] \\ &= \det \left[\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0), Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), \bar{u}'(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right]. \end{aligned}$$

Da $\psi(0)$ senkrecht auf den Vektoren $Y_i^u(0)$ und $Y_j^s(0)$ steht und nach Voraussetzung $\dim U(0) \cap S(0) = 1$, gilt

$$\det [\psi(0), Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), \bar{u}'(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0)] \neq 0.$$

Also ist durch

$$\left\{ \frac{\psi(0)}{|\psi(0)|}, Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), \bar{u}'(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right\}$$

eine Basis des \mathbb{C}^N gegeben. In dieser Basis hat $\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0) &= \left(\left(\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0) \right) \cdot \frac{\psi(0)}{|\psi(0)|} \right) \frac{\psi(0)}{|\psi(0)|} \\ &\quad + \sum_{i=2}^k c_i^u Y_i^u(0) + \sum_{j=1}^{N-k} c_j^s Y_j^s(0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

mit Koeffizienten $c_j^u, c_i^s \in \mathbb{C}$. Setzt man (3.15) in die obige Darstellung von $D'(0)$ ein, ergibt sich mit der Multilinearität der Determinante

$$D'(0) = \left(\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0) \right) \cdot \frac{\psi(0)}{|\psi(0)|} \times \det \left[\frac{\psi(0)}{|\psi(0)|}, Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), \bar{u}'(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0) \right]. \quad (3.16)$$

Der erste Faktor dieses Produkts kann durch ein Integral dargestellt werden. Hierzu betrachten wir die Lösungen $Y_1^u(\xi, \lambda)$ und $Y_1^s(\xi, \lambda)$ der Eigenwertgleichung (3.8) mit $Y_1^u(0, \lambda) = Y_1^u(\lambda)$ und $Y_1^s(0, \lambda) = Y_1^s(\lambda)$. Dann gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_1^u(\xi, \lambda) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_1^s(\xi, \lambda) = 0$$

und bei $\lambda = 0$ verbinden sich beide Lösung zu einer Eigenfunktion, $Y_1^u(\xi, 0) = Y_1^s(\xi, 0) = \bar{u}'(\xi)$. Überdies gilt

$$\frac{dY_1^{u/s}}{d\lambda}(0) = \frac{\partial Y_1^{u/s}}{\partial \lambda}(0, 0).$$

Wir setzen

$$\Theta^{u/s}(\xi) := \frac{\partial Y_1^{u/s}}{\partial \lambda}(\xi, 0) \cdot \psi(\xi),$$

so dass

$$\left(\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0) \right) \cdot \psi(0) = \Theta^u(0) - \Theta^s(0). \quad (3.17)$$

Da $\psi(\xi)$ für $|\xi| \rightarrow \infty$ mit exponentieller Rate abklingt, folgt zudem

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Theta^u(-\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Theta^s(\xi) = 0. \quad (3.18)$$

Ableiten von $\Theta^u(\xi)$ nach ξ ergibt unter Berücksichtigung von (3.8) und (3.12)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \Theta^u(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\partial Y_1^u}{\partial \lambda}(\xi, 0) \cdot \psi(\xi) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial Y_1^u}{\partial \xi}(\xi, \lambda) \right]_{\lambda=0} \cdot \psi(\xi) + \frac{\partial Y_1^u}{\partial \lambda}(\xi, 0) \cdot \psi'(\xi) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mathbb{A}(\xi, \lambda) Y_1^u(\xi, \lambda)]_{\lambda=0} \cdot \psi(\xi) + \frac{\partial Y_1^u}{\partial \lambda}(\xi, 0) \cdot (-\mathbb{A}(\xi, 0)^T \psi(\xi)) \\ &= \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \lambda}(\xi, 0) Y_1^u(\xi, 0) \cdot \psi(\xi) + \mathbb{A}(\xi, 0) \frac{\partial Y_1^u}{\partial \lambda}(\xi, 0) \cdot \psi(\xi) \\ &\quad - \mathbb{A}(\xi, 0) \frac{\partial Y_1^u}{\partial \lambda}(\xi, 0) \cdot \psi(\xi) \\ &= B Y_1^u(\xi, 0) \cdot \psi(\xi) \\ &= B \bar{u}'(\xi) \cdot \psi(\xi). \end{aligned}$$

Zusammen mit der analogen Rechnung für $\Theta^s(\xi)$ erhält man demnach die Gleichungen

$$\frac{d}{d\xi} \Theta^u(\xi) = B \bar{u}'(\xi) \cdot \psi(\xi), \quad \frac{d}{d\xi} \Theta^s(\xi) = B \bar{u}'(\xi) \cdot \psi(\xi).$$

Diese liefern für $\xi > 0$ die Darstellungen

$$\begin{aligned}\Theta^u(0) - \Theta^u(-\xi) &= \int_{-\xi}^0 B\bar{u}'(\tau) \cdot \psi(\tau) d\tau, \\ \Theta^s(\xi) - \Theta^u(0) &= \int_0^\xi B\bar{u}'(\tau) \cdot \psi(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

mit deren Hilfe man wiederum (3.17) schreiben kann als

$$\left(\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0) \right) \cdot \psi(0) = \int_{-\xi}^\xi B\bar{u}'(\tau) \cdot \psi(\tau) d\tau + \Theta^u(-\xi) + \Theta^s(\xi). \quad (3.19)$$

Die linke Seite von (3.19) hängt nicht von ξ ab, so dass man durch Übergang zum Grenzwert $\xi \rightarrow \infty$ wegen (3.18) schließlich auf die Darstellung

$$\left(\frac{dY_1^u}{d\lambda}(0) - \frac{dY_1^s}{d\lambda}(0) \right) \cdot \psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B\bar{u}'(\tau) \cdot \psi(\tau) d\tau \quad (3.20)$$

stößt. Die Konvergenz des Integrals wird dabei vom exponentiellen Abklingverhalten von \bar{u}' und ψ gesichert. Einsetzen von (3.20) in (3.16) liefert

$$\begin{aligned}D'(0) &= \frac{1}{|\psi(0)|^2} \det [\psi(0), Y_2^u(0), \dots, Y_k^u(0), \bar{u}'(0), Y_2^s(0), \dots, Y_{N-k}^s(0)] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} B\bar{u}'(\xi) \cdot \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Mit (3.13) folgt hieraus die gewünschte Darstellung (3.14). \square

Die Formel (3.14) hat eine schöne geometrische Interpretation, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_c f(\bar{u}(\xi), c_0) \cdot \psi(\xi) d\xi$$

ist genau das Melnikovintegral bezüglich des heteroklinen Orbits \bar{u} in (3.7), der u_- mit u_+ verbindet, und gibt wieder, wie sich die instabile Mannigfaltigkeit $W^u(u_-)$ und die stabile Mannigfaltigkeit $W^s(u_+)$ bei leichter Variation der Geschwindigkeit c trennen. Das Vorzeichen von $D'(0)$ hängt damit von der Richtung ab, in der sich $W^u(u_-)$ und $W^s(u_+)$ bezüglich c schneiden.

4 Die Profilgleichung

4.1 Schichtproblem und reduziertes Problem

In diesem Abschnitt wird die schnell-langsame Dynamik der Profilgleichung (1.3) analysiert, wobei wir annehmen, dass $0 < \varepsilon \ll c$. Anstatt in ε und c wird (1.3) hier in den Parametern $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$ und c betrachtet und ε durch $\varepsilon = \delta c$ definiert. Die Profilgleichung (1.3) lautet damit

$$\begin{aligned}u' &= v \\v' &= cv - f(u) + w \\w' &= \delta(u - \gamma w).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dies ist ein System der Form (2.1) mit singulärer Störung in $\delta = 0$. Die schnellen Variablen sind u, v , die langsame Variable ist w . Die Transformation von (4.1) auf die langsame Skala $\tau = \delta \xi$ ergibt

$$\begin{aligned}\delta \dot{u} &= v \\ \delta \dot{v} &= cv - f(u) + w \\ \dot{w} &= u - \gamma w\end{aligned}\tag{4.2}$$

mit $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$. Setzt man in (4.1) und (4.2) nun $\delta = 0$, so ergeben sich Schichtproblem und reduziertes Problem als

$$\begin{aligned}u' &= v \\v' &= cv - f(u) + w \\w' &= 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}0 &= v \\0 &= cv - f(u) + w \\ \dot{w} &= u - \gamma w.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Das reduzierte Problem (4.4) ist damit definiert auf der Menge $\mathcal{S} := \{(u, v, w) : v = 0, w = f(u)\}$. Es seien

$$w_{min} := \min_{u \in [0,1]} f(u), \quad w_{max} := \max_{u \in [0,1]} f(u)$$

und $K \subset (w_{min}, w_{max})$ ein abgeschlossenes Intervall. Für $w \in K$ existieren dann bei $p_0 = (0, 0, 0)$ und $p_1 = (1, 0, 0)$ die lokalen Umkehrabbildungen f_L^{-1} beziehungsweise f_R^{-1} von f , mit denen wir die beiden Mengen

$$S_L := \{(f_L^{-1}(w), 0, w) : w \in K\} \subset \mathcal{S}, \quad S_R := \{(f_R^{-1}(w), 0, w) : w \in K\} \subset \mathcal{S}$$

definieren. Die Linearisierung von

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w \end{aligned} \tag{4.5}$$

in einem Punkt $(u, 0, w, c) \in S_L \cup S_R$ ist gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(u) & c \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte $\mu^{u/s} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - f'(u)}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $X^{u/s} = (1, \mu^{u/s})$. Aus der Wahl der Menge K folgt dabei $f'(u) \neq 0$, so dass S_L und S_R normal hyperbolische kritische Mannigfaltigkeiten sind und jeweils die Voraussetzung (H2) des Abschnitts 2.1 mit $k^u = k^s = 1$ erfüllen.

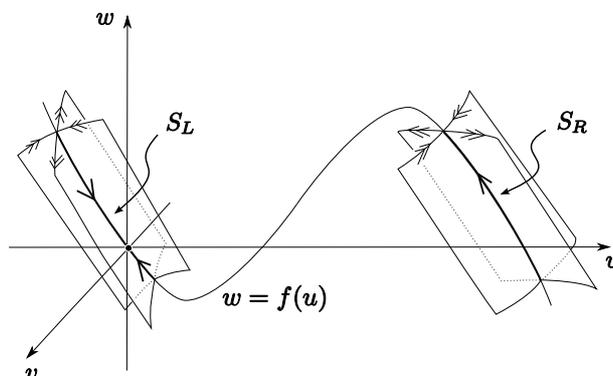


Abbildung 4.1: Langsame Mannigfaltigkeiten S_L und S_R mit zugehörigen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten

Das reduzierte Problem ist auf S_L gegeben als $\dot{w} = f_L^{-1}(w) - \gamma w$. Für $w > 0$ ist $\dot{w} < 0$ und für $w < 0$ entsprechend $\dot{w} > 0$, so dass $p_0 = (0, 0, 0) \in S_L$ stabiler Fixpunkt des reduzierten Problems auf S_L ist. Aus Satz 2.4 folgt, dass p_0 für $\delta > 0$ als hyperbolischer Fixpunkt von (4.1) persistiert, wobei $\dim W^u(p_0) = 0 + k^u = 1$ und $\dim W^s(p_0) = 1 + k^s = 2$. Auf der rechten kritischen Mannigfaltigkeit S_R besitzt das reduzierte Problem $\dot{w} = f_R^{-1}(w) - \gamma w$ wegen der Wahl von γ keinen Fixpunkt und es ist stets $\dot{w} > 0$.

Aus der Stabilität von p_0 als Fixpunkt des reduzierten Problems ergibt sich für $\delta > 0$ die Identität $W^s(p_0) = W^s(S_{L,\delta})$. Dabei sei $S_{L,\delta}$ die zu S_L diffeomorphe langsame Mannigfaltigkeit im Sinne von Satz 2.1. Im Folgenden wird die δ -Abhängigkeit der

langsamen Mannigfaltigkeiten nicht explizit benannt, sondern $S_{L,\delta}$ und $S_{R,\delta}$ ebenfalls kurz mit S_L beziehungsweise S_R bezeichnet. Aus dem Kontext wird stets ersichtlich sein, welche Mannigfaltigkeit betrachtet wird.

4.2 Orbits des Schichtproblems

In diesem Abschnitt werden die relevanten Orbits des Schichtproblems (4.3) konstruiert. Der Beweis von Lemma 4.2 folgt dabei der Darstellung im Abschnitt 5.4 in [16], der Beweis von Lemma 4.3 der im Anhang von [3].

Lemma 4.1 *Für $c = 0$ und $w = 0$ besitzt (4.3) einen zu p_0 homoklinen Orbit Γ_{s0} .*

Beweis Das Schichtproblem (4.5) ist für $w = 0$ identisch mit der Profildgleichung

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) \end{aligned} \tag{4.6}$$

der Nagumogleichung (1.4). Für $c = 0$ ist (4.6) hamiltonsch mit Hamilton-Funktion

$$H(u, v) := \frac{1}{2}v^2 + \int_0^u f(s)ds.$$

Ist also (u, v) Lösung von (4.6), so ist $\frac{d}{d\xi}H(u, v) = 0$ und (u, v) damit Teil einer Niveaulinie von H .

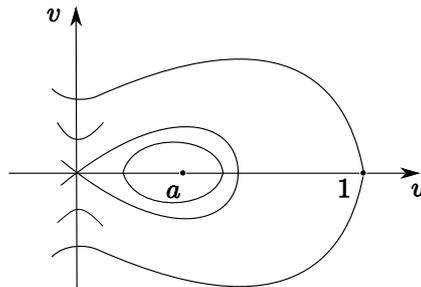


Abbildung 4.2: Niveaulinien von $H(u, v)$

Insbesondere liefert der Teil der Niveaulinie $\{H(u, v) = H(0, 0) = 0\}$ mit $u > 0$ einen zu $(0, 0)$ homoklinen Orbit $\{(u_0(\xi), v_0(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}$, so dass $\Gamma_{s0} := \{(u_0(\xi), v_0(\xi), 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$ ein zu p_0 homokliner Orbit von (4.3) ist. \square

Lemma 4.2 *Es existiert ein $c^* > 0$, so dass zu $c = c^*$ und $w = 0$ ein heterokliner Orbit J_F von (4.3) existiert, der $p_0 = (0, 0, 0) \in S_L$ mit $p_1 = (1, 0, 0) \in S_R$ verbindet.*

Beweis Es sei $w = 0$. Ist $(u(\xi), v(\xi))$ Lösung von (4.5) und $c > 0$, so gilt

$$\frac{d}{d\xi}H(u, v) = cv^2 > 0.$$

Die Funktion H wächst also monoton entlang der Lösung (u, v) . Bezeichne nun $(u^-(\xi), v^-(\xi))$ die Lösung von (4.6), die in der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(0, 0)$ liegt und für $\xi \rightarrow -\infty$ tangential zum instabilen Eigenvektor $X^u = (1, \mu^u)$ mit $\mu^u = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - f'(0)}$ ist. Ferner sei $(u^+(\xi), v^+(\xi))$ die Lösung von (4.6) mit $u^+ > 0$, die für $\xi \rightarrow +\infty$ gegen den Fixpunkt $(1, 0)$ konvergiert und für $\xi \rightarrow +\infty$ tangential zum stabilen Eigenvektor $X^s = (-1, -\mu^s)$, $\mu^s = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - f'(1)}$, ist. Es ist nun ein $c > 0$ zu finden, so dass sich $(u^-(\xi), v^-(\xi))$ und $(u^+(\xi), v^+(\xi))$ in einem Punkt schneiden und damit übereinstimmen.

Für kleine $c > 0$ schneidet die Lösung $(u^-(\xi), v^-(\xi))$ die u -Achse in einem Punkt mit $u < 1$. Da $\frac{d}{dc}\mu^u > 0$, wächst die v -Komponente von X^u mit wachsendem c . Dies bedeutet, dass $(u^-(\xi), v^-(\xi))$ für $\xi \rightarrow -\infty$ mit wachsendem c eine immer steiler werdende tangentielle Richtung besitzt. Ferner wächst $H(u, v)$ wegen $\frac{d}{d\xi}H(u^-, v^-) = c(v^-)^2$ für große $c > 0$ auch immer schneller entlang der Lösungen. Für ein hinreichend großes c muss die instabile Lösung $(u^-(\xi), v^-(\xi))$ folglich die Niveaulinie $\{H(u, v) = H(1, 0)\}$ schneiden. Die Lösung $(u^+(\xi), v^+(\xi))$ ihrerseits schneidet für kleine $c > 0$ die v -Achse in einem Punkt mit $v > 0$ und $H(0, v) < H(1, 0)$, für hinreichend großes $c > 0$ schneidet sie die Niveaulinie $\{H(u, v) = 0\}$. Dies folgt aus $\frac{d}{dc}\mu^s < 0$ und $\frac{d}{d\xi}H(u^+, v^+) > 0$ (dabei verfolgt man (u^+, v^-) allerdings in negativer ξ -Richtung).

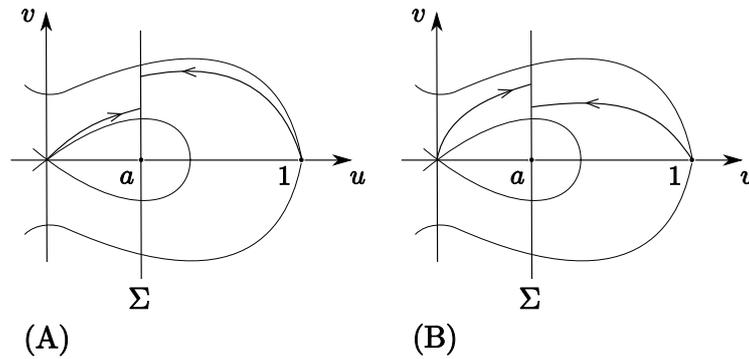


Abbildung 4.3: Verhalten von (u^-, v^-) und (u^+, v^+) für (A) $c \approx 0$ und (B) $c > 0$ hinreichend groß

Es sei nun $\Sigma = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}\}$. Wir setzen

$$\sigma^-(c) := \{(u^-(\xi), v^-(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\} \cap \Sigma = W_c^u(0, 0) \cap \Sigma,$$

$$\sigma^+(c) := \{(u^+(\xi), v^+(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\} \cap \Sigma = W_c^s(1, 0) \cap \Sigma$$

und definieren einen signierten Abstand zwischen $W_c^u(0, 0)$ und $W_c^s(1, 0)$ in Abhängigkeit von c durch

$$d(c) := \sigma^-(c) - \sigma^+(c).$$

Da $W_c^u(0,0)$ und $W_c^s(1,0)$ glatt vom Parameter c abhängen, ist d insbesondere stetig in c . Die oben angestellten Überlegungen besagen, dass $d(c) < 0$ für kleine $c > 0$ und $d(c) > 0$ für hinreichend große $c > 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz eines $c^* > 0$ mit $d(c^*) = 0$. Dies bedeutet, dass sich für $c = c^*$ die stabile Mannigfaltigkeit von $(0,0)$ mit der instabilen Mannigfaltigkeit von $(1,0)$ schneidet, (4.6) also einen heteroklinen Orbit von $(0,0)$ nach $(1,0)$ besitzt. Demzufolge existiert zu $c^* > 0$, $w = 0$ ein heterokliner Orbit J_F von (4.3), der p_0 mit p_1 verbindet. \square

Lemma 4.3 *Es existiert ein $w^* > 0$, so dass zu $c = c^*$ und $w = w^*$ ein heterokliner Orbit J_B von (4.3) existiert, der $(f_R^{-1}(w^*), 0, w^*) \in S_R$ mit $(f_L^{-1}(w^*), 0, w^*) \in S_L$ verbindet.*

Beweis Das Polynom $-f(u) + w$ besitzt für jedes $w_{min} < w < w_{max}$ drei reelle Nullstellen $u_1 < u_2 < u_3$, wodurch man die Darstellung

$$-f(u) + w = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (4.7)$$

erlangt. Die Nullstellen u_i hängen von w ab, $u_i = u_i(w)$, und es gilt $u_1(w) = f_L^{-1}(w)$, $u_3(w) = f_R^{-1}(w)$. Aus der Analyse des Schichtproblems folgt, dass $(u_1, 0)$ und $(u_3, 0)$ hyperbolische Fixpunkte von (4.5) mit jeweils eindimensionaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit sind.

Mit (4.7) lässt sich die zweite Gleichung von (4.3) für $v \neq 0$ äquivalent schreiben als

$$v \frac{dv}{du} = cv + (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \quad (4.8)$$

Setzt man $\vartheta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, so ist durch

$$v(u) = \vartheta (u - u_1) (u_3 - u)$$

eine Lösung von (4.8) zu $c = \vartheta(u_1 + u_3 - 2u_2)$ gegeben. Durch Einsetzen von $v = v(u)$ in die erste Gleichung von (4.3) erhält man

$$u' = v = \vartheta (u - u_1) (u_3 - u).$$

Die Dynamik von (4.3) ist damit reduziert auf eine eindimensionale Gleichung für u . Dies bringt uns einen Vorteil ein, da eine Lösung dieser Gleichung mit $u_1 < u < u_3$ einen heteroklinen Orbit von (4.3) liefert, der – je nach Vorzeichen von ϑ – von $(u_1, 0, w)$ nach $(u_3, 0, w)$ beziehungsweise von $(u_3, 0, w)$ nach $(u_1, 0, w)$ verläuft. Ist etwa $w = 0$ und $\vartheta > 0$, so gilt $u_1 = 0$, $u_2 = a$ und $u_3 = 1$ und der so gefundene Orbit von $(0,0,0)$ nach $(1,0,0)$ ist genau J_F (nun lässt sich c^* explizit als $c^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2a)$ berechnen).

Um den Orbit J_B zu erhalten, muss ein $w^* > 0$ gefunden werden, so dass die zugehörigen Nullstellen $u_i = u_i(w^*)$ die Bedingung

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_3 - 2u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2a) = c^* \quad (4.9)$$

erfüllen und die Geschwindigkeiten damit übereinstimmen. Dass ein solches w^* tatsächlich existiert, folgt aus der Symmetrie von f . Setzt man

$$\hat{u} := \frac{1}{3}(1+a), \quad \hat{w} := f(\hat{u}) = \frac{1}{27}(1+a)(2-a)(1-2a),$$

so ist (\hat{u}, \hat{w}) der Wendepunkt von f . Da

$$f(\hat{u}-u) - f(\hat{u}) = \frac{u}{3}(3u^2 - (1-a)^2) = -f(\hat{u}+u) + f(\hat{u})$$

für beliebiges $u \in \mathbb{R}$, ist f symmetrisch zum Punkt (\hat{u}, \hat{w}) .

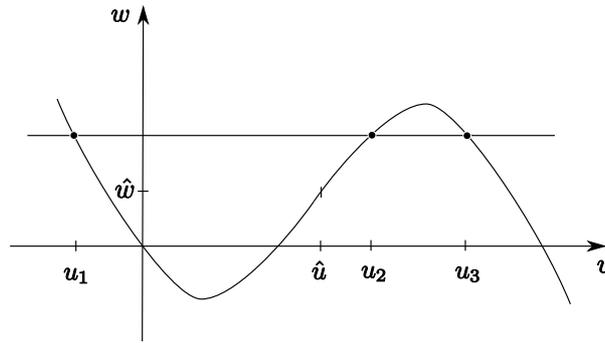


Abbildung 4.4: Symmetrie von $f(u)$ und die Nullstellen u_i von $-f(u) + w$

Wir definieren w^* als

$$0 < w^* = 2\hat{w} < w_{max}.$$

Dies bedeutet, dass $(u_3(w^*), w^*)$ gleich der Spiegelung des Ursprungs an (\hat{u}, \hat{w}) ist. Wegen der Symmetrie von f sind die Nullstellen $u_i^* = u_i(w^*)$ daher festgelegt durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{u} - u_1^* &= u_3(0) - \hat{u} = 1 - \hat{u}, \\ u_3^* - \hat{u} &= \hat{u} - u_1(0) = \hat{u}, \\ u_2^* - \hat{u} &= \hat{u} - u_2(0) = \hat{u} - a. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$u_1^* + u_3^* - 2u_2^* = 2\hat{u} - 1 + 2\hat{u} - 4\hat{u} + 2a = -(1-2a).$$

Die Bedingung (4.9) ist also erfüllt und für $c = c^*$ und $w = w^*$ existiert eine Lösung $(u_B(\xi), v_B(\xi), w^*)$ von (4.5) mit

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (u_B(\xi), v_B(\xi), w^*) = (u_3^*, 0, w^*), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (u_B(\xi), v_B(\xi), w^*) = (u_1^*, 0, w^*).$$

Diese Lösung liefert den gesuchten Orbit $J_B := \{(u_B(\xi), v_B(\xi), w^*) : \xi \in \mathbb{R}\}$. \square

Wie oben bereits angedeutet, liefert der Beweis von Lemma 4.3 auch den Orbit J_F . Mit dem Ziel einer möglichst knappen Darstellung hätte man die Konstruktion mit

Hilfe der Funktion $H(u, v)$ also auch weglassen können. Die sehr unterschiedlichen Herangehensweisen rechtfertigen jedoch das Anführen beider Beweise.

Mit den Verbindungen J_F und J_B lässt sich nun ein zu p_0 singulärer homokliner Orbit wie folgt zusammensetzen. Durch den Orbit J_F wird $p_0 \in S_L$ mit $p_1 \in S_R$ verbunden. Der langsame Fluss des reduzierten Problems auf S_R transportiert p_1 nach $(u_1^*, 0, w^*) \in S_R$. Dieser Punkt wird wiederum durch J_B (also durch den schnellen Fluss) mit $(u_1^*, 0, w^*) \in S_L$ verbunden. Da p_0 anziehender Fixpunkt des reduzierten Problems ist, wird $(u_1^*, 0, w^*)$ auf S_L schließlich nach p_0 transportiert. Den aus den beschriebenen Anteilen schneller und langsamer Dynamik zusammengesetzten singulären Orbit bezeichnen wir mit Γ_{f_0} . Dieser existiert für $\delta = 0$, $c = c^*$ und wir nehmen an, dass die kompakte Menge K so gewählt ist, dass sie das Intervall $[0, w^*]$ enthält.

Im Grenzfall $a = \frac{1}{2}$ gilt $c^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2a) = 0$ und folglich auch $w^* = 0$. Die Orbits Γ_{s_0} und Γ_{f_0} fallen dann zusammen und bilden einen heteroklinen Zyklus Γ_0 von p_0 nach p_1 .

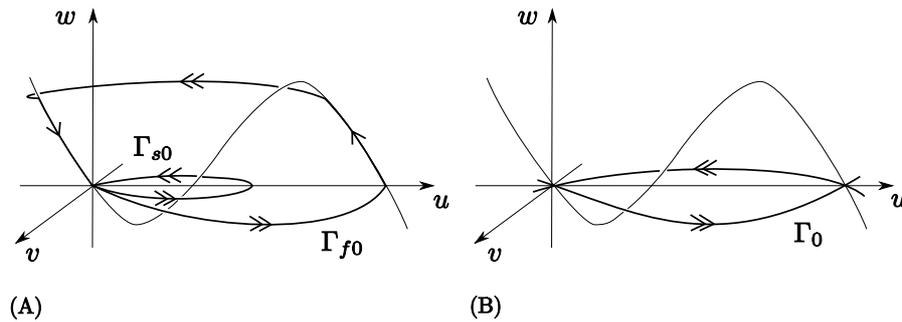


Abbildung 4.5: Singuläre Orbits von (4.1) für (A) $a < \frac{1}{2}$ und (B) $a = \frac{1}{2}$

5 Langsame Pulse

5.1 Existenz der langsamen Pulse

Für $\delta > 0$ lassen sich zu p_0 homokline Orbits von (4.1) als Störungen des bei $\delta = c = 0$ existierenden Orbits $\Gamma_{s0} = \{\phi_0(\xi) = (u_0(\xi), v_0(\xi), 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$ gewinnen. Den so konstruierten homoklinen Orbits entsprechen die langsamen Pulse von (1.1).

Sei $\delta = 0$. Da p_0 stabiler Fixpunkt des reduzierten Problems ist, gilt $\mathcal{W}^u(p_0) = \{p_0\}$ und $\mathcal{W}^s(p_0) = S_L$. Die singulären Mannigfaltigkeiten von p_0 (vgl. Abschnitt 2.2) sind für $c = 0$ daher gegeben als

$$\mathcal{N}_0^u = \bigcup_{p \in \mathcal{W}^u(p_0)} \mathcal{F}_0^u(p) = \mathcal{F}_0^u(p_0), \quad \mathcal{N}_0^s = \bigcup_{p \in \mathcal{W}^s(p_0)} \mathcal{F}_0^s(p) = \bigcup_{p \in S_L} \mathcal{F}_0^s(p).$$

Die Mannigfaltigkeiten \mathcal{N}_0^u und \mathcal{N}_0^s schneiden sich entlang des Orbits Γ_{s0} . Da jedoch $\dim \mathcal{N}_0^u = 1$ und $\dim \mathcal{N}_0^s = 2$, ist der Schnitt im (u, v, w) -Raum nicht transversal und es ist zunächst unklar, ob er für $\delta > 0$ persistiert. Wir betrachten deswegen das um eine triviale Gleichung für c erweiterte System

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w \\ w' &= \delta(u - \gamma w) \\ c' &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dem Fixpunkt p_0 von (4.4) entspricht hier die eindimensionale invariante Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} := \{(0, 0, 0, c) : c \in (-c_0, c_0)\}$, $c_0 > 0$, des reduzierten Problems zu (5.1). Die zugehörigen singulären Mannigfaltigkeiten sind gegeben als

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^u &= \bigcup_{-c_0 < c < c_0} \mathcal{N}_c^u \times \{c\}, \quad \dim \mathcal{N}^u = 2, \\ \mathcal{N}^s &= \bigcup_{-c_0 < c < c_0} \mathcal{N}_c^s \times \{c\}, \quad \dim \mathcal{N}^s = 3, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{N}_c^u die singuläre instabile, \mathcal{N}_c^s die singuläre stabile Mannigfaltigkeit von p_0 zum Parameterwert c bezeichne. Die Mannigfaltigkeiten \mathcal{N}^u und \mathcal{N}^s schneiden sich entlang des Orbits $\{(u_0(\xi), v_0(\xi), 0, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$, und zwar transversal.

Um dies zu zeigen, sei nun $h^u(\xi, c)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit $w = 0$, so dass

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} h^u(\xi, c) = (0, 0) \quad (5.3)$$

und $h^u(\xi, 0) = \phi_0(\xi)$. Mit $h^s(\xi, w, c)$ bezeichnen wir die Lösung von (5.2) mit

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} h^s(\xi, w, c) = (f_L^{-1}(w), 0),$$

die im Fall $w = 0, c = 0$ durch

$$h^s(\xi, 0, 0) = h^u(\xi, 0) = \phi_0(\xi)$$

gegeben ist. Für $-c_0 < c < c_0$ und $w \in K$ ist somit $(h^u(\xi, c), 0) \in \mathcal{F}_0^u(p_0)$ und $(h^s(\xi, w, c), 0) \in \mathcal{F}_0^s(f_L^{-1}(w), 0, w)$. Die Lösungen $h^u(\xi, c)$ und $h^s(\xi, w, c)$ seien ferner dadurch festgelegt, dass sie beide die u -Achse zum ersten Mal in $\xi_0 = 0$ schneiden.

Desweiteren bezeichne $F_0(u, v, w, c)$ die rechte Seite von (5.2). Bis auf Multiplikation mit einer Konstanten ist ϕ'_0 die einzige beschränkte Lösung der linearisierten Gleichung

$$Y' = D_{(u,v)}F_0(\phi, 0, 0)Y,$$

wodurch auch die adjungierte Gleichung

$$\psi' = -D_{(u,v)}F_0(\phi, 0, 0)^T \psi = \begin{pmatrix} 0 & f'(u_0(\xi)) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \psi$$

eine bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutige beschränkte Lösung besitzt. Diese ist durch $\psi = (-v'_0(\xi), u'_0(\xi)) = (-v'_0(\xi), v_0(\xi))$ gegeben und es folgt

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} D_c F_0(u_0, v_0, 0, 0) \cdot \psi \, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2 \, d\xi > 0. \quad (5.4)$$

Der Schnitt von \mathcal{N}^u und \mathcal{N}^s in einem Punkt $p = (\phi_0(\xi_0), 0, 0)$ ist genau dann transversal, wenn

$$T_p \mathcal{N}^u + T_p \mathcal{N}^s = \mathbb{R}^4. \quad (5.5)$$

Da $\phi'_0(\xi_0) \neq 0$ und $\psi(\xi_0) \perp \phi'_0(\xi_0)$ ist mit

$$\begin{aligned} T_p \mathcal{N}^u &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \phi'_0(\xi_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial h^u}{\partial c}(\xi_0, 0) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ T_p \mathcal{N}^s &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \phi'_0(\xi_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial h^s}{\partial w}(\xi_0, 0, 0) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial h^s}{\partial c}(\xi_0, 0, 0) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

die Bedingung (5.5) äquivalent zu

$$\psi(\xi_0) \cdot \left(\frac{\partial h^u}{\partial c}(\xi_0, 0, 0) - \frac{\partial h^s}{\partial c}(\xi_0, 0, 0) \right) \neq 0.$$

Aus $M > 0$ in (5.4) folgt daher, dass sich die Mannigfaltigkeiten \mathcal{N}^u und \mathcal{N}^s entlang des homoklinen Orbits im (u, v, w, c) -Raum transversal schneiden. Dieser Schnitt persistiert für kleine $\delta > 0$ als Schnitt der Mannigfaltigkeiten \mathcal{N}_δ^u und \mathcal{N}_δ^s und aus Korollar 3.1 in [31] folgt, dass für hinreichend kleine $\delta > 0$ ein $c > 0$ existiert, so dass die Profilleichung (4.1) einen zu p_0 homoklinen Orbit besitzt.

Um die Wellengeschwindigkeit c , zu der für $\delta > 0$ dieser homokline Orbit existiert, als Funktion von δ zu erhalten, definieren wir einen signierten Abstand

$$d(\delta, c) = \text{dist} \{ \mathcal{N}_\delta^u, \mathcal{N}_\delta^s \}.$$

Die Funktion $d(\delta, c)$ ist eine glatte Funktion in δ und c und ein homokliner Orbit existiert genau dann, wenn $d(\delta, c) = 0$. Da $d(0, 0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial c} d(0, 0) \neq 0$ (dies folgt aus $M \neq 0$), erhält man durch den Satz über die implizite Funktion eine für $\delta \approx 0$ definierte Funktion $c(\delta)$, so dass $d(\delta, c) = 0$ genau dann, wenn $c = c(\delta)$.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir zusammen als

Satz 5.1 *Es existiert ein $\delta_1 > 0$ und eine glatte Schar von Wellengeschwindigkeiten $\{c(\delta) : 0 \leq \delta < \delta_1\}$, so dass die Profilleichung (4.1) für $0 < \delta < \delta_1$ und $c = c(\delta)$ einen zu p_0 homoklinen Orbit Γ_c besitzt.*

Bemerkungen

1. Satz 2.7 selbst kann man auf Systeme der Gestalt (5.1) nicht anwenden, da \mathcal{N} keine normal hyperbolische Mannigfaltigkeit des reduzierten Problems zu (5.1) ist (das Problem ist die triviale Gleichung $c' = 0$). Die Existenz homokliner Orbits für $\delta > 0$ folgt jedoch auch in diesem Fall aus der Transversalität des Schnittes von \mathcal{N}^u und \mathcal{N}^s (vgl. Kapitel 3 und 5 in [31]).

2. Mit einer Melnikov-Rechnung kann man zeigen, dass $c'(0) > 0$ (vgl. [25]). Folglich kann man alternativ auch δ als Funktion von c darstellen, $\delta = \delta(c)$. Damit ist $\varepsilon = c\delta = c\delta(c) = \delta'(0)c^2 + \mathcal{O}(c^3)$, also $\varepsilon = \mathcal{O}(c^2)$ beziehungsweise $c = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

3. Es sei $F(u, v, w, c)$ die rechte Seite der Profilleichung (4.1). In p_0 besitzt die Linearisierung

$$D_{(u,v,w)} F(p_0, c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda - f'(0) & c & 1 \\ \delta & 0 & -\gamma\delta \end{pmatrix}$$

für $\delta > 0$ die Eigenwerte $\alpha_i(\delta)$ mit

$$\text{Re } \alpha_1(\delta) < \text{Re } \alpha_2(\delta) < 0 < \text{Re } \alpha_3(\delta).$$

Dies folgt aus der Hyperbolizität von p_0 beziehungsweise aus Satz 2.4 ($\alpha_1(0)$ ist der stabile, $\alpha_3(0)$ der instabile Eigenvektor der Linearisierung des Schichtproblems in $(0, 0)$ und $\alpha_2(0) = 0$). Aus Satz 2.4 folgt weiter, dass die $\alpha_i(\delta)$ glatt von δ abhängen.

Während für $c = 0$ der ebene Orbit Γ_{s0} asymptotisch zu den zu $\alpha_3(0)$ beziehungsweise $\alpha_1(0)$ assoziierten Eigenräumen ist, ist $\Gamma_{c=c(\delta)}$ für $\delta > 0$ asymptotisch zu den zu $\alpha_3(\delta)$ und $\alpha_2(\delta)$ gehörigen Eigenräumen. Somit konvergiert Γ_c für $\delta > 0$ entlang der langsamen Mannigfaltigkeit S_L gegen p_0 (dies folgt ebenfalls aus einer Melnikov-Rechnung, vgl. wieder [25]).

4. Die Orbits $\Gamma_c = \{(u_c(\xi), v_c(\xi), w_c(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}$, die als Störung des Orbits Γ_{s0} gewonnen werden, bezeichnet man auch kurz mit Γ_s , also $\Gamma_s = \{(u_c(\xi), v_c(\xi), w_c(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}$ mit einem $c \in (0, c_1)$, wobei $c_1 := c(\delta_1)$.

5.2 Instabilität der langsamen Pulse

Der ebene Orbit Γ_{s0} liefert einen Puls der Nagumo-Gleichung (1.4) mit Geschwindigkeit $c = 0$. Dieser ist instabil und die langsamen Pulse $U_c = (u_c, w_c)$ von (1.1) werden diese Instabilität zumindest für kleine $c > 0$ erben.

Satz 5.2 *Für hinreichend kleines $c > 0$ sind die in Abschnitt 5.1 konstruierten langsamen Wellen $U_c = (u_c, w_c)$ von (1.1) instabil.*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in drei Schritten. Zunächst wird die Instabilität von $u_0(\xi)$ als Puls von (1.4) gezeigt, indem die Existenz einer Nullstelle $\lambda_* > 0$ der zugehörigen Evans-Funktion $D_0(\lambda)$ bewiesen wird. In einem zweiten Schritt werden analytische Funktionen $E_c(\lambda)$ für $c > 0$ definiert, deren Nullstellen Eigenwerte des linearisierten Operators zu $U_c = (u_c, w_c)$ sind. Im dritten und letzten Schritt wird mit Hilfe des Brouwerschen Abbildungsgrades [6] gezeigt, dass $E_c(\lambda)$ in einer Umgebung von λ_* mindestens eine Nullstelle mit positivem Realteil besitzt. Hieraus folgt dann mit Satz 3.2 die Instabilität der langsamen Wellen.

Zunächst konstruieren wir die Evans-Funktion $D_0(\lambda)$. Die Transformation von (1.4) auf (ξ, t) -Koordinaten führt auf die Gleichung

$$u_t = u_{\xi\xi} - cu_\xi + f(u)$$

und der linearisierte Operator L (vgl. Abschnitt 3.1) ist mit $c = 0$ daher definiert durch

$$Lp = p_{\xi\xi} + f'(u_0)p.$$

Das zugehörige Eigenwertproblem $(L - \lambda)p = 0$ als System erster Ordnung geschrieben lautet

$$\begin{aligned} p' &= q \\ q' &= (\lambda - f'(u_0))p \end{aligned} \tag{5.6}$$

beziehungsweise

$$W' = \mathbb{A}(\xi, \lambda)W \quad (5.7)$$

mit

$$\mathbb{A}(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(u_0(\xi)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\xi \rightarrow \pm\infty$ ist (5.7) asymptotisch zu einem linearen System mit konstanten Koeffizienten, das durch die Endmatrix

$$\mathbb{A}_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(0) & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Eigenwerte von $\mathbb{A}_0(\lambda)$ sind $\mu^{u/s}(\lambda) = \pm\sqrt{\lambda - f'(0)} = \pm\sqrt{\lambda + a}$, die zugehörigen Eigenräume werden aufgespannt durch die Vektoren $X^u(\lambda) = (1, \sqrt{\lambda + a})$, $X^s(\lambda) = (-1, \sqrt{\lambda + a})$.

Da $\mu^{u/s}(\lambda) \in i\mathbb{R}$ für reelle $\lambda < -a$, ist $\sigma_{ess}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < -a\}$ (vgl. den Anhang zu Kapitel 5 in [16]). Das wesentliche Spektrum von L liegt also ganz in der linken Halbebene und es existiert somit ein Gebiet $G_0 \subset \mathbb{C}$ mit

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \subset G_0, \quad \sigma(L) \cap G_0 \subset \sigma_p(L).$$

Für $\lambda \in G_0$ ist die Endmatrix $\mathbb{A}_0(\lambda)$ hyperbolisch und es gilt $\dim U(\lambda) = \dim S(\lambda) = 1$ (vgl. Abschnitt 3.2). Wir wählen $Y^u(\lambda) \in U(\lambda)$ und $Y^s(\lambda) \in S(\lambda)$ derart, dass sie analytisch in λ sind, und definieren die Evans-Funktion als

$$D_0(\lambda) = \det [Y^u(\lambda), Y^s(\lambda)].$$

Die Instabilität von u_0 als Puls von (1.4) folgt nun aus

Lemma 5.3 *Es existiert ein reelles $\lambda_* > 0$ mit $D_0(\lambda_*) = 0$.*

Beweis Es sei $F_0(u, v, c)$ die rechte Seite von

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u). \end{aligned}$$

Wir wählen die Vektoren $Y^u(\lambda)$ und $Y^s(\lambda)$ so, dass

$$Y^u(0) = Y^s(0) = \phi'(0).$$

Da $\phi'_0(\xi) = (u'_0(\xi), v'_0(\xi))$ die bis auf Multiplikation mit einer Konstanten einzige beschränkte Lösung von

$$W' = \mathbb{A}(\xi, 0)W = D_{(u,v)}F_0(\phi_0(\xi), 0)W$$

ist, ist $\psi = (-v'_0, v_0)$ die bis auf Multiplikation mit einer Konstanten einzige beschränkte Lösung des adjungierten Problems

$$\psi' = -\mathbb{A}(\xi, 0)^T \psi.$$

Zusammen mit $\det [\psi, \phi'_0] = -v_0^2 - v_0 u'_0 = -v_0^2 - v_0^2 < 0$ folgt aus Lemma 3.8 nun

$$\begin{aligned} D'_0(0) &= \frac{1}{|\psi(0)|^2} \det [\psi(0), \phi'(0)] \int_{-\infty}^{+\infty} D_c F_0(\phi_0, 0) \psi \, d\xi \\ &= \frac{1}{|\psi(0)|^2} \det [\psi(0), \phi'(0)] \int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2 \, d\xi \\ &< 0. \end{aligned}$$

Um nun auch das Vorzeichen von $D_0(+\infty)$ zu bestimmen, führen wir neue, mit λ skalierte Variablen ein (vgl. [1]),

$$\tilde{p} = p, \quad \sqrt{|\lambda|} \tilde{q} = q, \quad \zeta = \sqrt{|\lambda|} \xi, \quad (5.8)$$

wobei wir uns auf reelle $\lambda > 0$ beschränken. In den Variablen (5.8) ist das Eigenwertproblem (5.6) gegeben als

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_\zeta \\ \tilde{q}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - |\lambda|^{-1} f'(u_0(\frac{\zeta}{\sqrt{|\lambda|}})) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

und für $\lambda \rightarrow \infty$ konvergiert (5.9) gegen das System

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_\zeta \\ \tilde{q}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Die Matrix dieser Gleichung besitzt die Eigenwerte $\tilde{\mu} = \pm 1$. Eigenvektor zu $\tilde{\mu} = 1$ ist $Y^- = (1, 1)$, Eigenvektor zu $\tilde{\mu} = -1$ ist $Y^+ = (-1, 1)$. Die Evans-Funktion \tilde{D} zu (5.10) lässt sich damit explizit ausrechnen als

$$\tilde{D} = \det [Y^-, Y^+] = 2 > 0.$$

Da $|\lambda^{-1} f'(u_0(\frac{\zeta}{\sqrt{|\lambda|}}))|$ für hinreichend großes λ gleichmäßig in ζ beschränkt ist, konvergieren die Räume $U(\lambda)$ und $S(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen $\text{span}\{Y^-\}$ beziehungsweise $\text{span}\{Y^+\}$. Dies folgt aus der Robustheit (*roughness*) von exponentiellen Dichotomien gegenüber Störungen (vgl. Kapitel 4 in [4] oder die Darstellung in [30]). Folglich ist $D_0(\lambda) \neq 0$ für große $\lambda \in \mathbb{R}$. Um mit Lemma 3.7 die Instabilität zu folgern, müssen wir aber das Vorzeichen von $D_0(+\infty)$ bestimmen, also die Orientierung von D_0 beachten.

In der Definition von D_0 waren die Vektoren $Y^u(\lambda)$ und $Y^s(\lambda)$ so gewählt, dass für die zugehörigen Lösungen gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{Y^u(\xi, \lambda)}{|Y^u(\xi, \lambda)|} = \frac{X^u(\lambda)}{|X^u(\lambda)|}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{Y^s(\xi, \lambda)}{|Y^s(\xi, \lambda)|} = \frac{X^s(\lambda)}{|X^s(\lambda)|}.$$

In den skalierten Variablen sind die asymptotischen Richtungen damit gegeben als

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\tilde{Y}^u(\xi, \lambda)}{|\tilde{Y}^u(\xi, \lambda)|} = \frac{\tilde{X}^u(\lambda)}{|\tilde{X}^u(\lambda)|}, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{Y}^s(\xi, \lambda)}{|\tilde{Y}^s(\xi, \lambda)|} = \frac{\tilde{X}^s(\lambda)}{|\tilde{X}^s(\lambda)|}$$

mit

$$\tilde{X}^u(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1 + \frac{a}{\lambda}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}^s(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{1 + \frac{a}{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt $\tilde{X}^u(\lambda) \rightarrow Y^-$ und $\tilde{X}^s(\lambda) \rightarrow Y^+$, woraus folgt, dass $\operatorname{sgn} D_0(+\infty) = \operatorname{sgn} \tilde{D}$, also

$$D_0(+\infty) > 0.$$

Da andererseits $D'_0(0) < 0$, existiert mindestens ein reelles $\lambda_* > 0$ mit $D_0(\lambda_*) = 0$ (vgl. Abschnitt 3.3). \square

Die Eigenwertgleichung für die langsamen Pulse $U_c = (u_c, w_c)$ lautet

$$\begin{aligned} p' &= q \\ q' &= cq + (\lambda - f'(u_c))p + r \\ r' &= \frac{\varepsilon}{c}p - \frac{\lambda + \varepsilon\gamma}{c}r. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dabei ist $\varepsilon = \varepsilon(c) = \mathcal{O}(c^2)$ und wir beschränken uns für den Rest dieses Abschnitts auf $\lambda \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil. Da das Eigenwertproblem (5.11) nicht-autonom ist, koppeln wir das System (5.11) zunächst mit der Profilgleichung (4.1),

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w \\ w' &= \frac{\varepsilon}{c}(u - \gamma w) \\ p' &= q \\ q' &= cq + (\lambda - f'(u))p + r \\ cr' &= \varepsilon p - (\lambda + \varepsilon\gamma)r, \end{aligned} \tag{5.12}$$

und erhalten eine autonome Differentialgleichung der Gestalt (2.2) mit singulärer Störung in $c = 0$, d. h. (5.12) definiert ein dynamisches System auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^3$ mit langsamer Dynamik in u, v, w, p, q und schneller Dynamik in r . Das zu (5.12) gehörige reduzierte Problem lautet mit $\varepsilon(0) = 0$ nun

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -f(u) + w \\ w' &= 0 \\ p' &= q \\ q' &= (\lambda - f'(u))p. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Da $\operatorname{Re} \lambda > 0$, ist dieses definiert auf der Menge

$$\mathcal{S} = \{(u, v, w, p, q, r) : r = 0\}.$$

Wir wählen kompakte, einfach zusammenhängende Mengen $K_1 \subset \mathbb{R}^3$ und $K_2 \subset \mathbb{C}^2$ derart, dass

$$\bigcup_{0 \leq c < c_1} \Gamma_c \subset K_1$$

und die Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^2$ in K_2 enthalten sind. Auf $K := K_1 \times K_2$ definieren wir die Funktion

$$h^0(u, v, w, p, q) \equiv 0.$$

Die kritische Mannigfaltigkeit

$$M_0 := \{(u, v, w, p, q, r) : (u, v, w, p, q) \in K, r = h^0(u, v, w, p, q) \equiv 0\} \subset \mathcal{S}$$

ist normal hyperbolisch bezüglich des Schichtproblems

$$\dot{r} = -\lambda r$$

($\dot{} = d/d\tau$, $\tau = \xi/c$). Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt und für kleine $c > 0$ existieren auf K definierte, in c reguläre Funktionen h^c , so dass die Mannigfaltigkeiten

$$M_c = \{(u, v, w, p, q, r) : (u, v, w, p, q) \in K, r = h^c(u, v, w, p, q)\}$$

lokal invariant unter (5.12) sind. Auf einer solchen langsamen Mannigfaltigkeit M_c ist (5.12) gegeben als

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w \\ w' &= \frac{\varepsilon}{c}(u - \gamma w) \\ p' &= q \\ q' &= cq + (\lambda - f'(u))p + h^c(u, v, w, p, q). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns hier nur für Lösungen (u, v, w, p, q, r) von (5.12) entlang des Orbits Γ_c , also für solche mit $(u, v, w) = (u_c, v_c, w_c) = \phi_c$, und können uns infolgedessen auf die Gleichung

$$\begin{aligned} p' &= q \\ q' &= cq + (\lambda - f'(u_c))p + h^c(\phi_c, p, q). \end{aligned} \tag{5.14}$$

zurückziehen. Dabei ist (p, q) genau dann Lösung von (5.14), wenn $(p, q, h^c(\phi_c, p, q))$ Lösung von (5.11) ist. Ziel ist es nun, zu einem λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ eine Lösung $(p(\xi, \lambda), q(\xi, \lambda))$ von (5.14) zu finden, die für $\xi \rightarrow \pm\infty$ abklingt. Eine solche Lösung liefert eine links- und rechtsabklingende Lösung von (5.11), also eine Eigenfunktion.

Sind (p_1, q_1) und (p_2, q_2) Lösungen von (5.14), so folgt aus der Linearität von (5.11), dass mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ auch $\alpha(p_1, q_1) + \beta(p_2, q_2)$ Lösung von (5.14) ist. Für $\alpha(p_1, q_1) + \beta(p_2, q_2) \in K_2$ ergibt sich damit durch Einsetzen in die Gleichung (5.14)

$$h^c(\phi_c, \alpha(p_1, q_1) + \beta(p_2, q_2)) = \alpha h^c(\phi_c, p_1, q_1) + \beta h^c(\phi_c, p_2, q_2),$$

wodurch $h^c(\phi_c, p, q)$ linear in p und q ist. Setzt man $h_1^c(\xi) := h^c(\phi_c(\xi), 1, 0)$ und $h_2^c(\xi) := h^c(\phi_c(\xi), 0, 1)$, so lässt sich (5.14) mit also $W = (p, q)$ schreiben als

$$W' = [\mathbb{A}(\xi, \lambda) + \mathbb{B}(\xi, c)] W, \quad (5.15)$$

wobei

$$\mathbb{A}(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(u_0(\xi)) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}(\xi, c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f'(u_0(\xi)) - f'(u_c(\xi)) + h_1^c(\xi) & c + h_2^c(\xi) \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion der langsamen Pulse ist $|u_0 - u_c| = \mathcal{O}(c)$, also $|f'(u_0) - f'(u_c)| < \kappa_0 c$ mit einer Konstanten $\kappa_0 > 0$. Desweiteren existieren durch $h^c = \mathcal{O}(c)$ für $i = 1, 2$ Konstanten $\kappa_i > 0$ mit $|h_i^c| < \kappa_i c$, so dass insgesamt ein $\kappa > 0$ existiert mit

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\mathbb{B}(\xi, c)\| < \kappa c.$$

Das System (5.15) konvergiert für $c \rightarrow 0$ somit gegen das durch $\mathbb{A}(\xi, \lambda)$ gegebene System (5.7). Da (5.7) exponentielle Dichotomien auf \mathbb{R}^- und \mathbb{R}^+ besitzt, besitzt auch (5.15) für hinreichend kleines $c > 0$ exponentielle Dichotomien auf \mathbb{R}^- und \mathbb{R}^+ (dies folgt wiederum aus der Robustheit exponentieller Dichotomien, vgl. [4, 30]). Die entsprechenden Räume $U_c(\lambda)$ und $S_c(\lambda)$ sind für λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ wohldefiniert und konvergieren für $c \rightarrow 0$ gegen die Räume $U(\lambda)$ und $S(\lambda)$. Insbesondere gilt $\dim U_c(\lambda) = \dim S_c(\lambda) = 1$ und wir können Vektoren $Y_c^u(\lambda) \in U_c(\lambda)$ und $Y_c^s(\lambda) \in S_c(\lambda)$ derart wählen, dass diese analytisch von λ abhängen und auf $G_0 \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ für $c \rightarrow 0$ gegen $Y^u(\lambda)$ beziehungsweise $Y^s(\lambda)$ konvergieren. Folglich sind durch

$$E_c(\lambda) = \det [Y_c^u(\lambda), Y_c^s(\lambda)]$$

auf $G_0 \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ analytische Funktionen definiert, die für $c \rightarrow 0$ auf kompakten λ -Mengen gleichmäßig gegen die Evans-Funktion $D_0(\lambda)$ des Nagumo-Pulses konvergieren. Die E_c selbst sind gewissermaßen reduzierte Evans-Funktionen für die langsamen Pulse, denn nach Konstruktion ist $E_c(\lambda) = 0$ genau dann, wenn (5.15) – und somit (5.11) – eine links- und rechtsabklingende Lösung besitzt, also eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ existiert. Wir zeigen nun mit Hilfe des Brouwer-Grades, dass für jedes hinreichend kleine $c > 0$ die Funktion $E_c(\lambda)$ eine Nullstelle λ_c mit $\operatorname{Re} \lambda_c > 0$ besitzt.

Nach Lemma 5.3 besitzt D_0 die reelle Nullstelle $\lambda_* > 0$. Aus der Analytizität von D_0 folgt zusammen mit $D_0'(0) \neq 0$, dass λ_* eine isolierte Nullstelle ist. Es existiert daher ein kleines Gebiet $\Omega \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ mit $\lambda_* \in \Omega$ und $D_0 \neq 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{\lambda_*\}$. Insbesondere ist $D_0 \neq 0$ auf $\partial\Omega$ und der Brouwer-Grad $d(D_0, \Omega, 0)$ von D_0 bezüglich Ω ist wohldefiniert. Da D_0 analytisch ist, folgt ferner

$$d(D_0, \Omega, 0) > 0.$$

Setze nun $\alpha = \operatorname{dist}(0, D_0(\partial\Omega))$. Dann folgt für alle $c > 0$ mit

$$\sup_{\lambda \in \overline{\Omega}} |D_0(\lambda) - E_c(\lambda)| < \alpha$$

aus der Stetigkeit des Brouwer-Grades

$$d(E_c, \Omega, 0) = d(D_0, \Omega, 0) > 0.$$

Dies bedeutet aber, dass für jedes hinreichend kleine $c > 0$ mindestens ein $\lambda_c \in \Omega$ existiert mit

$$E_c(\lambda_c) = 0.$$

Mithin besitzt das Eigenwertproblem (5.11) zu λ_c eine beschränkte Lösung und λ_c ist Eigenwert des zu $U_c = (u_c, w_c)$ assoziierten linearisierten Operators

$$L_c \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{\xi\xi} - cp_{\xi} + f'(u_c)p - r \\ -cr_{\xi} + \varepsilon(p - \gamma r) \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{Re} \lambda_c > 0$, folgt hieraus Satz 5.2, also die Instabilität der langsamen Pulse $U_c = (u_c, w_c)$.

Bemerkungen

1. Da $r = 0$ anziehender Fixpunkt des Schichtproblems $\dot{r} = -\lambda r$ ist, kann eine Lösung von (5.12), die nicht auf M_c liegt, auch nicht für $\xi \rightarrow -\infty$ beschränkt sein. Dies rechtfertigt noch einmal die Restriktion des Eigenwertproblems (5.11) auf M_c .
2. Auch Flores führt die Instabilität der langsamen Pulse in [14] auf die Instabilität des Nagumo-Pulses zurück. Der hier gebrachte Beweis ist allerdings in sich etwas geschlossener, da auch die Instabilität des Nagumo-Pulses anhand der Evans-Funktion gezeigt wird und zudem die Singularität des Eigenwertproblems in $c = 0$ konsistent mit den Mitteln der geometrischen singulären Störungstheorie behandelt wird.

6 Schnelle Pulse

6.1 Existenz der schnellen Pulse

Die schnellen Pulse entstehen als Störungen des singulären Orbits Γ_{f_0} , der sich aus den schnellen Orbits J_F , J_B und langsamen Orbits auf S_L und S_R zusammensetzt.

Satz 6.1 Sei $0 < a < \frac{1}{2}$ fest gewählt. Dann existiert eine Kurve

$$\{(c, \varepsilon(c)) : c \approx c^*\}$$

mit $\varepsilon(c^*) = 0$, so dass zu jedem Punkt der Kurve ein zu p_0 homokliner Orbit Γ_f existiert. Die Orbits Γ_f liegen nahe beim singulären Orbit Γ_{f_0} und konvergieren gegen diesen, $\Gamma_f \rightarrow \Gamma_{f_0}$ für $c \rightarrow c^*$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Es sei wieder $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Die für $\delta > 0$ existierenden, zu S_L und S_R diffeomorphen langsamen Mannigfaltigkeiten $S_{L,\delta}$ und $S_{R,\delta}$ werden erneut kurz mit S_L und S_R bezeichnet, so dass insbesondere $W^s(S_L) = W^s(p_0)$ für $\delta > 0$ (vgl. Abschnitt 4.1). Der Parameter $\gamma > 0$ in (4.1) ist hier so gewählt, dass $p_1 = (1, 0, 0)$ für $\varepsilon > 0$ nicht als Fixpunkt persistiert. Eine besondere Schwierigkeit besteht somit darin, die Lage von $W^u(p_0)$ und $W^s(S_L)$ bei S_R für kleine $\delta > 0$ zu bestimmen. In [25] wird dazu die durch die Shilnikov-Koordinaten gegebene Beschreibung des Flusses bei S_R genutzt. Diesen Beweis von Satz 6.1 aus [25] werde ich hier wiedergeben.

In der Nähe der rechten langsamen Mannigfaltigkeit S_R ist die Profilgleichung (4.1) in Fenichel-Koordinaten gegeben als

$$\begin{aligned}x' &= -A^s(x, y, z, \delta)x \\y' &= A^u(x, y, z, \delta)y \\z' &= \delta(1 + B(x, y, z, \delta)xy)\end{aligned}\tag{6.1}$$

mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ und glatten Funktionen A^s , A^u und B , wobei $A^s, A^u > \rho > 0$ mit einem $\rho > 0$. Die rechte Seite von (4.1) hängt glatt von den Parametern a und c ab (vgl. [18, 25]). Damit ist (6.1) von der Form (2.13) und Satz 2.8 kann angewandt werden. Wir wählen global definierte Koordinaten (x, y, z) des \mathbb{R}^3 , die in einer kleinen Umgebung von $p_1 \in S_R$ gerade die Fenichel-Koordinaten sind und außerhalb dieser

Umgebung mit den ursprünglichen (u, v, w) -Koordinaten übereinstimmen. Der Punkt $(f^{-1}(w^*), 0, w^*) \in S_R$ habe in den (x, y, z) -Koordinaten die Darstellung $(0, 0, z^*)$. Ferner sei $\Delta > 0$ hinreichend klein.

Ein zu p_0 homokliner Orbit existiert genau dann, wenn sich die instabile Mannigfaltigkeit $W^u(p_0)$ echt mit der stabilen Mannigfaltigkeit $W^s(S_L)$ schneidet. Dies ist äquivalent zu

$$\Pi(W^u(p_0) \cap \Sigma_1) \in W^s(S_L) \cap \Sigma_2, \quad (6.2)$$

wobei $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ die in Abschnitt 2.3 beschriebene Abbildung von $\Sigma_1 = \{(x, y, z) : x = \Delta\}$ nach $\Sigma_2 = \{(x, y, z) : y = \Delta\}$ ist. Die Bedingung (6.2) besagt also, dass der Punkt $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ durch den Fluss auf die Kurve $W^s(S_L) \cap \Sigma_2$ transportiert wird. Die Strategie ist nun zunächst, die Positionen von $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ und $W^s(S_L) \cap \Sigma_2$ in Abhängigkeit von c, δ und z bis auf kleine Fehler zu bestimmen, um dann mit dieser Darstellung und dem Satz 2.8 die Bedingung (6.2) neu formulieren zu können.

Lemma 6.2 *Es existieren nichtverschwindende Koeffizienten η_1, \dots, η_4 mit $\eta_1, \eta_2, \eta_4 < 0$ und $\eta_3 > 0$, so dass für $(c, \delta, z) \approx (c^*, 0, z_*)$ gilt*

$$\begin{aligned} W^u(p_0) \cap \Sigma_1 &= (\Delta, \eta_1(c - c^*) + \eta_2\delta, \mathcal{O}(\delta)) + R_1, \\ W^s(S_L) \cap \Sigma_2 &= (\eta_3(c - c^*) - \eta_4(z - z^*) + \mathcal{O}(\delta), \Delta, z + \mathcal{O}(\delta)) + R_2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Der Restterm R_1 ist quadratisch in c und δ , R_2 ist quadratisch in c, δ und z .

Beweis Für $\delta = 0$ ist die Ebene $\{w = 0\}$ invariant und die Transformation auf die (x, y, z) -Koordinaten lässt in diesem Fall die w -Koordinate unverändert. Die z -Komponente von $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ ergibt sich demnach direkt aus der dritten Gleichung in (6.1).

Die Mannigfaltigkeit $W^s(S_R)$ ist in Fenichel-Koordinaten gegeben durch die Ebene $\{y = 0\}$, $W^u(S_R)$ entsprechend durch die Ebene $\{x = 0\}$. Die y -Koordinate von $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ misst also den Abstand von $W^u(p_0)$ zu $W^s(S_R)$. Dieser Abstand hängt glatt von c und δ ab und die y -Komponente kann für $(c, \delta) \approx (c^*, 0)$ durch eine Taylor-Entwicklung dargestellt werden. Die Koeffizienten werden durch Melnikov-Rechnungen bestimmt. Da der Übergang zu Fenichel-Koordinaten die Vorzeichen der Melnikov-Integrale nicht ändert, können die Integrale in den ursprünglichen (u, v, w) -Koordinaten berechnet werden [25].

Es sei $F_0(u, v, w, c)$ die rechte Seite von

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= cv - f(u) + w. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Für $c = c^*$ und $\delta = 0$ schneiden sich $W^u(p_0)$ und $W^s(S_R)$ entlang des Orbits $J_F = \{X_F(\xi) = (u_F(\xi), v_F(\xi), 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$. In erster Ordnung ist der Abstand von $W^u(p_0)$

zu $W^s(S_R)$ in Abhängigkeit von c gegeben durch

$$M_c = \int_{-\infty}^{+\infty} D_c F_0(X_F(\xi), c^*) \cdot \hat{\psi}(\xi) d\xi.$$

Dabei ist $\hat{\psi}(\xi) = (\hat{\psi}_1(\xi), \hat{\psi}_2(\xi))$ die bis auf Multiplikation mit einer Konstanten einzige beschränkte Lösung der adjungierten Gleichung

$$\psi' = \begin{pmatrix} 0 & f'(u_F(\xi)) \\ -1 & -c^* \end{pmatrix} \psi. \quad (6.5)$$

Da (6.5) für $\xi \rightarrow \pm\infty$ asymptotisch zu autonomen Systemen mit hyperbolischen Endmatrizen ist, folgt $(\hat{\psi}_1(\xi), \hat{\psi}_2(\xi)) \rightarrow (0, 0)$. Andererseits steht $\hat{\psi}$ senkrecht auf $T_{X_F(\xi)}W^u(p_0)$, also $\hat{\psi}_1 u'_F + \hat{\psi}_2 v'_F = 0$. Damit ist $\hat{\psi}_2(\xi) \neq 0$, denn $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ können nicht gleichzeitig verschwinden und es ist $u'_F \neq 0$. Wir orientieren $\hat{\psi}$ nun zusätzlich so, dass $\hat{\psi}(\xi) \cdot X^s > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt. Dabei ist $X^s = (-1, -\frac{c^*}{2} + \sqrt{\frac{c^*}{4} - f'(1)})$ der stabile Eigenvektor von $D_{(u,v)}F_0(p_1)$, der in entgegengesetzte Flussrichtung zeigt.

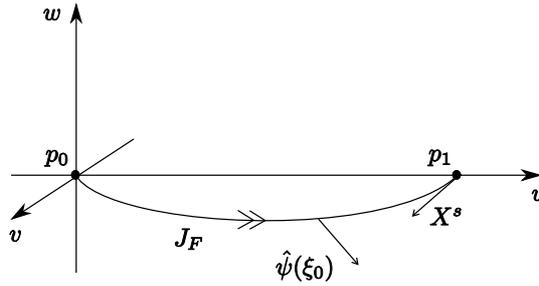


Abbildung 6.1: Orientierung von $\hat{\psi}$

Durch diese Orientierung ist $\hat{\psi}_2(\xi) > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und folglich

$$M_c = \int_{-\infty}^{+\infty} v_F(\xi) \hat{\psi}_2(\xi) d\xi > 0.$$

Zudem zeigt $\hat{\psi}$ in der Nähe von p_1 in negative y -Richtung.

Um den Abstand von $W^u(p_0)$ zu $W^s(S_R)$ in Abhängigkeit von δ bei $\delta = 0$ zu berechnen, betrachten wir die zu (4.1) adjungierte Gleichung

$$\Psi' = \begin{pmatrix} 0 & f'(u_F(\xi)) & 0 \\ -1 & -c^* & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi. \quad (6.6)$$

Der Raum der beschränkten Lösungen von (6.6) wird aufgespannt durch $(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3)$ und $(0, 0, 1)$. Dabei ist $(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ obige Lösung von (6.5) und $\hat{\psi}_3$ durch $\hat{\psi}'_3 = -\hat{\psi}_3$ gegeben. Da $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\psi}_2(\xi) = 0$, existiert auch $\hat{\psi}_3^+ := \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\psi}_3(\xi)$. Demnach ist

$$\Psi(\xi) = \left(\hat{\psi}_1(\xi), \hat{\psi}_2(\xi), \hat{\psi}_3^+ - \hat{\psi}_3(\xi) \right)$$

eine beschränkte Lösung von (6.6) mit $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Psi(\xi) = 0$ und $\hat{\psi}_3^+ - \hat{\psi}_3(\xi) > 0$ für alle ξ . Die letzte Eigenschaft folgt aus $\hat{\psi}_2 > 0$ und $\hat{\psi}_3' = -\hat{\psi}_2$. In der Nähe von p_1 zeigt Ψ mit der Orientierung von $\hat{\psi}$ ebenfalls in negative y -Richtung. Der Abstand von $W^u(p_0)$ zu $W^s(S_R)$ bezüglich δ lässt sich nun berechnen als

$$M_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} D_\delta F(X_F(\xi), c^*, 0) \cdot \Psi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} u_F(\xi)(\hat{\psi}_3^+ - \hat{\psi}_3(\xi)) d\xi > 0,$$

wobei $F(u, v, w, c, \delta)$ die rechte Seite von (4.1) bezeichne.

Die Koeffizienten η_1 und η_2 messen den Abstand von $W^u(p_0)$ zu $W^s(S_R)$ in y -Richtung bezüglich c beziehungsweise δ . Da $\hat{\psi}$ und Ψ in negative y -Richtung zeigen, folgt $\text{sgn } \eta_1 = -\text{sgn } M_c$ und $\text{sgn } \eta_2 = -\text{sgn } M_\delta$, also $\eta_1, \eta_2 < 0$.

Die Vorzeichen der Koeffizienten η_3 und η_4 werden durch entsprechende Melnikov-Rechnungen bezüglich des Orbits J_B bestimmt. \square

Beweis von Satz 6.1 Mit Lemma 6.2 lassen sich die Positionen von $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ und $W^s(S_L) \cap \Sigma_2$ bei $(c, \delta) \approx (c^*, 0)$ darstellen als

$$\begin{aligned} W^u(p_0) \cap \Sigma_1 &= (\Delta, \mu_1(c - c^*) + \mu_2\delta, \mathcal{O}(\delta)), \\ W^s(S_L) \cap \Sigma_2 &= (\mu_3(c - c^*) - \mu_4(z - z^*) + \mathcal{O}(\delta), \Delta, z + \mathcal{O}(\delta)), \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\eta_1 + \mathcal{O}(c - c^*, z - z^*, \delta), & \mu_2 &= -\eta_2 + \mathcal{O}(c - c^*, z - z^*, \delta), \\ \mu_3 &= \eta_3 + \mathcal{O}(c - c^*, z - z^*, \delta), & \mu_4 &= -\eta_4 + \mathcal{O}(c - c^*, z - z^*, \delta) \end{aligned}$$

(alle Koeffizienten μ_i sind positiv). Ein homokliner Orbit existiert genau dann, wenn

$$\Pi(W^u(p_0) \cap \Sigma_1) \in W^s(S_L) \cap \Sigma_2,$$

wobei die Abbildung $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ in erster Ordnung durch die Shilnikov-Koordinaten gegeben ist. Satz 2.8 besagt nun, dass zu jedem hinreichend großen T eine eindeutige Lösung $X(\xi)$ von (4.1) existiert, so dass

$$\begin{aligned} X(0) &= (\Delta, b_1 e^{-\alpha_u^* T}, z), \\ X(T) &= (b_2 e^{-\alpha_s^* T}, \Delta, z + \delta T + \mathcal{O}(\delta e^{-\alpha^* T})). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dabei ist $b_i := a_i + \mathcal{O}(e^{-\alpha^* T})$, $i = 1, 2$, und die a_i hängen nicht von T ab [25]. Infolgedessen existiert ein homokliner Orbit für $0 < \delta, c - c^*$ hinreichend klein, also eine Lösung $X(\xi)$ mit

$$\begin{aligned} X(0) &= (\Delta, \mu_1(c - c^*) + \mu_2\delta, \mathcal{O}(\delta)), \\ X(T) &= (\mu_3(c - c^*) - \mu_4(z - z^*) + \mathcal{O}(\delta), \Delta, z + \mathcal{O}(\delta)), \end{aligned} \quad (6.9)$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} (b_1 e^{-\alpha_u^* T}, z) &= (\mu_1(c - c^*) + \mu_2\delta, \mathcal{O}(\delta)) \\ (b_2 e^{-\alpha_s^* T}, \hat{z}) &= (\mu_3(c - c^*) - \mu_4(\hat{z} - z^*) + \mathcal{O}(\delta), \hat{z} + \mathcal{O}(\delta)) \\ \hat{z} &= z + \delta T + \mathcal{O}(\delta). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Aus den drei Gleichungen erhält man durch Einsetzen von \hat{z} die beiden Gleichungen

$$b_1 e^{-\alpha_u^* T} = -\mu_1(c - c^*) - \mu_2 \delta \quad (6.11)$$

$$b_2 e^{-\alpha_s^* T} = \mu_3(c - c^*) - \mu_4(\delta T - z^*) + \mathcal{O}(\delta). \quad (6.12)$$

Diese definieren δ lokal als reguläre Funktion von c , $\delta = \delta_*(c)$. Setze dazu

$$\begin{aligned} A_1(c, \delta, 1/T) &= -\mu_1(c - c^*) - \mu_2 \delta - b_1 e^{-\alpha_u^* T}, \\ A_2(c, \delta T, 1/T) &= \mu_3(c - c^*) - \mu_4(\delta T - z^*) - b_2 e^{-\alpha_s^* T} + \mathcal{O}(\delta). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dann ist (6.11) äquivalent zu $A_1(c, \delta, 1/T) = 0$, (6.12) zu $A_2(c, \delta T, 1/T) = 0$. Gleichung (6.12) ist mit $\delta T = z^*$, $c = c^*$ und $1/T = 0$ erfüllt,

$$A_2(c^*, z^*, 0) = 0.$$

Wegen $\mu_4 \neq 0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial \delta T} A_2(c^*, z^*, 0) \neq 0$$

und nach dem Satz über die implizite Funktion können wir (6.12) lokal nach δT als Funktion von c und $1/T$ auflösen. Dabei ist $\delta = \mathcal{O}(\frac{1}{T^2} + (c - c^*)\frac{1}{T})$ und mit $b_1 e^{-\alpha_u^* T} = \mathcal{O}(1/T)$ folgt

$$\begin{aligned} \delta T \left(c, \frac{1}{T} \right) &= z^* + \frac{\mu_3}{\mu_4}(c - c^*) + \mathcal{O}(\delta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \\ &= z^* + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T} + (c - c^*)\right) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\delta \left(c, \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} z^* + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2} + (c - c^*)\frac{1}{T}\right). \quad (6.14)$$

Einsetzen von (6.14) in (6.11) liefert nun

$$b_1 e^{-\alpha_u^* T} = -\mu_1(c - c^*) - \mu_2 \frac{1}{T} z^* + \mu_2 \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2} + (c - c^*)\frac{1}{T}\right). \quad (6.15)$$

Lösungen c und $1/T$ dieser Gleichung sind äquivalent formuliert die Nullstellen von $\tilde{A}_1(c, 1/T) = A_1(c, \delta(c, 1/T), 1/T)$. Es ist $\tilde{A}_1(c^*, 0) = 0$ und da $\mu_2 z^* \neq 0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial 1/T} \tilde{A}_1(c^*, 0) \neq 0,$$

so dass aus dem Satz über die implizite Funktion jetzt die lokale Darstellbarkeit von $1/T$ als Funktion von c folgt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= -\frac{\mu_1(0)}{\mu_2(0)z^*}(c - c^*) + \mathcal{O}((c - c^*)^2) \\ &= -\frac{\eta_1}{\eta_2 z^*}(c - c^*) + \mathcal{O}((c - c^*)^2). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Setzt man (6.16) nun in (6.14) ein, liefert dies δ als Funktion von c ,

$$\delta_*(c) = -\frac{\mu_1(0)}{\mu_2(0)}(c - c^*) + \mathcal{O}((c - c^*)^2). \quad (6.17)$$

Mit anderen Worten: Für c nahe bei c^* besitzt (4.1) genau dann einen homoklinen Orbit zu p_0 , wenn $\delta = \delta_*(c)$ gilt. Dieser ist eindeutig bestimmt und da $\delta_*(c) \rightarrow 0$ für $c \rightarrow c^*$, konvergiert er gegen den singulären Orbit Γ_{f_0} . Mit $\varepsilon = c\delta$ ist dies genau die Aussage von Satz 6.1.

6.2 Stabilität der schnellen Pulse

Die Stabilität der schnellen Pulse haben Jones [20] und Yanagida [34] unabhängig voneinander bewiesen. Ich werde in diesem Abschnitt kurz die Argumentation von Jones skizzieren, nach der im Fall der schnellen Pulse $D'(0)D(+\infty) > 0$ sogar ein hinreichendes Kriterium der Stabilität ist (dass es ein notwendiges ist, folgt aus Lemma 3.7). Das Vorzeichen von $D'(0)$ werde ich dann aus der Konstruktion in Abschnitt 6.1 gewinnen.

Es sei $c_0 > 0$ fest gewählt, $0 < c^* - c_0 \ll 1$, und $\delta_0 = \delta(c_0)$, so dass ein zu p_0 homokliner Orbit Γ_f von (4.1) mit zugehöriger Lösung $\phi_{c_0}(\xi) = (u_{c_0}(\xi), v_{c_0}(\xi), w_{c_0}(\xi))$ existiert. Der Einfachheit wegen schreiben wir für ϕ_{c_0} im Folgenden kurz $\phi = (u, v, w)$.

Der Operator $L : \mathcal{D}(L) \subset C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \rightarrow C_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ der Linearisierung um den Puls (u, w) ist definiert als

$$L \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{\xi\xi} - cp_{\xi} + f'(u)p - r \\ -c_0 r_{\xi} + \varepsilon_0(p - \gamma r) \end{pmatrix},$$

so dass das zugehörige Eigenwertproblem durch das System

$$W' = \mathbb{A}(\xi, \lambda)W \tag{6.18}$$

mit $W = (p, q, r)$ und

$$\mathbb{A}(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda - f'(u) & c_0 & 1 \\ \delta_0 & 0 & -\frac{\lambda}{c_0} - \gamma\delta_0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Folglich ist die Endmatrix von (6.18) die Matrix

$$\mathbb{A}_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda + a & c_0 & 1 \\ \delta_0 & 0 & -\frac{\lambda}{c_0} - \gamma\delta_0 \end{pmatrix}.$$

In [20] zeigt Jones, dass ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und ein reelles $b < 0$ existieren, so dass $\sigma(L) \cap G \subset \sigma_p(L)$ und $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > b\} \subset G$, das wesentliche Spektrum $\sigma_{ess}(L)$ also in der linken Halbebene liegt.

Die Matrix $\mathbb{A}_0(0) = D_{(u,v,w)}F(p_0)$ besitzt zwei Eigenwerte mit negativem, einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dies folgt aus der Charakterisierung des hyperbolischen

Fixpunkts p_0 . Da aber $\sigma(L) \cap G \subset \sigma_p(L)$, besitzt $\mathbb{A}_0(\lambda)$ damit für alle $\lambda \in G$ Eigenwerte $\alpha_i(\lambda)$ mit

$$\operatorname{Re} \alpha_3(\lambda) < \operatorname{Re} \alpha_2(\lambda) < 0 < \operatorname{Re} \alpha_1(\lambda).$$

Es seien $X_i(\lambda)$ normierte Eigenvektoren zu den entsprechenden $\alpha_i(\lambda_i)$ derart, dass

$$e_1 \cdot X_3(0) > 0, \quad e_2 \cdot X_1(0) > 0, \quad e_3 \cdot X_2(0) > 0,$$

wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^3 bezeichnen (für $\lambda = 0$ sind die $X_i(0)$ reelle Eigenvektoren von $DF(p_0)$).

Das Eigenwertproblem (6.18) besitzt somit eine links- und zwei rechtsabklingende Lösungen $Y_i(\xi, \lambda)$,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_1(\xi, \lambda) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y_{2/3}(\xi, \lambda) = 0. \quad (6.19)$$

Wir wählen die Funktionen $Y_i(\xi, \lambda)$ derart, dass

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{Y_1(\xi, \lambda)}{|Y_1(\xi, \lambda)|} = X_1(\lambda), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{Y_2(\xi, \lambda)}{|Y_2(\xi, \lambda)|} = -X_2(\lambda), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{Y_3(\xi, \lambda)}{|Y_3(\xi, \lambda)|} = -X_3(\lambda)$$

und

$$Y_1(\xi, 0) = Y_2(\xi, 0) = \phi'(\xi).$$

Da ϕ nach Konstruktion für $\xi \rightarrow +\infty$ entlang S_L gegen p_0 konvergiert, ist $\phi' = kY_1(\cdot, 0) = kY_2(\cdot, 0)$ mit einem $k \in \mathbb{R}$ und die zweite Bedingung daher nur eine Normierung. Mit $Y_i(\lambda) := Y_i(0, \lambda)$ definieren wir die Evans-Funktion durch

$$D(\lambda) = \det [Y_1(\lambda), Y_2(\lambda), Y_3(\lambda)].$$

Demzufolge ist $D(\lambda)$ orientiert wie die Evans-Funktion in [20] und es ist $D(+\infty) > 0$ [10, 20].

Die heteroklinen Orbits J_F und J_B des Schichtproblems liefern Fronten reduzierter Gleichungen, für die man Evans-Funktionen D_F und D_B definieren kann. Diese Fronten sind stabil und die Nullstelle von D_F beziehungsweise D_B mit größtem Realteil ist $\lambda = 0$. Jones zeigt, dass jede Nullstelle von D in einer kleinen Umgebung einer Nullstelle von D_F oder D_B liegen muss. Da zudem das wesentliche Spektrum von L in der linken Halbebene liegt, kann die Stabilität des Pulses also nur durch solche Eigenwerte mit positivem Realteil beeinträchtigt werden, die in einer kleinen Umgebung von $\lambda = 0$ liegen [20].

Durch die Berechnung der Umlaufzahl von D bezüglich eines kleinen Kreises um den Ursprung gelingt es Jones ferner zu zeigen, dass D in der Nähe des Ursprungs genau zwei Nullstellen besitzt (statt D selbst betrachtet Jones eine analytische Fortsetzung \tilde{D} , die verschwindet, wenn D verschwindet). Eine dieser Nullstellen liegt mit $\lambda = 0$ jedoch bereits fest, die zweite Nullstelle ist folglich reell. Zusammen mit $D(+\infty) > 0$ entscheidet nun das Vorzeichen von $D'(0)$ darüber, ob die zweite Nullstelle negativ oder positiv ist.

Zur Berechnung von $\text{sgn } D'(0)$ benutzen wir die (x, y, z) -Koordinaten aus dem Existenzbeweis und fixieren ϕ derart, dass $\phi(0) \in \Sigma_1$. Desweiteren sei ψ beschränkte Lösung des adjungierten Problems

$$\psi' = -\mathbb{A}(\xi, 0)^T \psi = -DF(\phi(\xi))^T \psi.$$

Die Matrix $-DF(p_0)^T$ ist hyperbolisch mit den Eigenwerten $\beta_i = -\bar{\alpha}_i(0)$, also

$$\text{Re } \beta_1 < 0 < \text{Re } \beta_2 < \text{Re } \beta_3.$$

Mit X_i^* bezeichnen wir die zugehörigen normierten Eigenvektoren, für die $X_i(0) \cdot X_i^* > 0$ gilt. Da ψ beschränkt ist, folgt

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|} = \pm X_1^*, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|} \in \text{span}\{X_2^*, X_3^*\}.$$

Wir wählen ψ so, dass $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\psi(\xi)/|\psi(\xi)|) = X_1^*$. In [25] wird gezeigt, dass dann

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|} = X_2^* \tag{6.20}$$

und ein $\sigma > 0$ existiert mit

$$\psi(0) = \sigma(0, -1, 0) \tag{6.21}$$

(damit liegt $\psi(0)$ selbst nicht in Σ_1). Mit dieser Wahl der Funktionen ψ und $Y_3(\xi, \lambda)$ gilt

Lemma 6.3 $\det[\psi(0), \phi'(0), Y_3(0)] > 0$.

Beweis Betrachte zunächst zu beliebigem $\xi \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\theta(\xi) = \det \left[\frac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|}, \frac{\phi'(\xi)}{|\phi'(\xi)|}, \frac{Y_3(\xi, 0)}{|Y_3(\xi, 0)|} \right].$$

Da ψ als Lösung des adjungierten Problems sowohl senkrecht auf ϕ' als auch auf $Y_3(\cdot, \lambda)$ steht, ist $\theta(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Durch die jeweiligen Orientierungen folgt desweiteren

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \theta(\xi) = \det[X_1^*, -X_2(0), -X_3(0)].$$

Die Vektoren $X_1^*, -X_2(0)$ und $-X_3(0)$ sind dabei $\mathcal{O}(\delta)$ -kleine Störungen der entsprechenden Vektoren $\tilde{X}_1^*, -\tilde{X}_2(0)$ und $-\tilde{X}_3(0)$ bei $\delta = 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^* &= \frac{1}{\sqrt{a^2 \mu^{s^2} + a^2 + \mu^{s^2}}} \begin{pmatrix} -a\mu^s \\ a \\ -\mu^s \end{pmatrix}, & -\tilde{X}_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \\ -\tilde{X}_3(0) &= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^{s^2}}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\mu^s \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mu^s = \frac{c_0}{2} - \sqrt{\frac{c_0^2}{4} - a}$. Für diese Vektoren berechnet man $\det[\tilde{X}_1^*, -\tilde{X}_2(0), -\tilde{X}_3(0)] > 0$ und da $\delta_0 > 0$ klein ist, gilt demnach auch

$$\det[X_1^*, -X_2(0), -X_3(0)] > 0.$$

Somit ist $\theta(\xi) > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und insbesondere ist $\theta(0) > 0$. Hieraus ergibt sich die Behauptung. \square

Nach Lemma 3.8 gilt

$$D'(0) = \frac{1}{|\psi(0)|^2} \det[\psi(0), \phi'(0), Y_3(0)] \int_{-\infty}^{+\infty} D_c F(\phi(\xi), c_0) \cdot \psi(\xi) d\xi$$

und das *heart of the matter* ist damit das Vorzeichen von

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} D_c F(\phi(\xi), c_0) \cdot \psi(\xi) d\xi. \quad (6.22)$$

Dieses lässt sich aus dem Beweis von Satz 6.1 gewinnen.

Dazu betrachten wir noch einmal die Gleichungen (6.11) und (6.12) beziehungsweise die Funktionen $A_1(c, \delta, 1/T)$ und $A_2(c, \delta, 1/T)$ aus (6.13).

Im Existenzbeweis wurde gezeigt, dass δ durch $A_2(c, \delta, 1/T) = 0$ lokal als Funktion von c und $1/T$ definiert werden kann. Aus der entsprechenden Darstellung (6.14) folgt wegen $z^* \neq 0$ aber, dass man hieraus auch $1/T$ als Funktion von c und δ gewinnen kann,

$$\frac{1}{T} = \frac{\delta}{z^*} + \mathcal{O}(\delta^2 + (c - c^*)^2). \quad (6.23)$$

Hiermit und da $b_1 e^{-\alpha_u^* T}$ als Funktion von $c - c^*$ und δ von sogar beliebig hoher Ordnung ist, folgt

$$\rho(c, \delta) := A_1\left(c, \delta, \frac{1}{T}(c, \delta)\right) = -\mu_1(0)(c - c^*) - \mu_2(0)\delta + \mathcal{O}(\delta^2 + (c - c^*)^2). \quad (6.24)$$

Für (c, δ) nahe $(c^*, 0)$ ist dabei $\nabla \rho(c, \delta) \neq (0, 0)$. Die Niveaulinien von $\rho(c, \delta)$ sind somit reguläre Kurven in der (c, δ) -Ebene. Die Kurve $\{(c, \delta) : \rho(c, \delta) = 0\}$ ist dabei genau die im Existenzbeweis konstruierte $(c, \delta_*(c))$ -Kurve, also

$$\rho(c, \delta) = 0 \Leftrightarrow \delta = \delta_*(c).$$

Die Funktion $\rho(c, \delta)$ spielt nun die entscheidende Rolle, da sie nach Konstruktion die y -Differenz von $W^u(p_0)$ und $W^s(S_L) = W^s(p_0)$ auf Σ_1 in Abhängigkeit von c und δ misst, also einen signierten Abstand von $W^u(p_0)$ und $W^s(p_0)$ definiert.

Fixiert man insbesondere δ als $\delta = \delta_0$, so misst

$$\rho_0(c) := \rho(c, \delta_0)$$

den Abstand bezüglich der y -Richtung von $W^u(p_0)$ und $W^s(p_0)$ auf Σ_1 in Abhängigkeit von c . Da zudem $-\mu_1 < 0$, gilt

$$\left. \frac{d\rho_0(c)}{dc} \right|_{c=c_0} < 0. \quad (6.25)$$

Nun lässt sich das Vorzeichen des Melnikov-Integrals M in (6.22) bestimmen. Das Integral misst den Abstand von $W^u(p_0)$ und $W^s(p_0)$ auf Σ_1 in erster Ordnung in c – allerdings in Richtung von $\psi(0)$. Da $\psi(0)$ wegen (6.21) in negative y -Richtung zeigt, folgt aus (6.25) somit

$$M > 0.$$

Infolgedessen gilt $D'(0) > 0$. Mithin sind die schnellen Pulse stabil.

Die Shilnikov-Koordinaten im Sinne von Satz 2.8 ermöglichen also nicht nur einen eleganten Beweis der Existenz. Vielmehr liefern sie auch die wichtige Information, wie sich stabile und instabile Mannigfaltigkeit bezüglich c schneiden, in einer vergleichbar leicht zugänglichen Weise. Während das Vorzeichen von $D'(0)$ in [20] mit sehr ausgeklügelten, aber doch speziellen Argumenten hergeleitet wird, ist das oben geschilderte Vorgehen wohl für allgemeinere singular gestörte Gleichungen möglich, die in der Nähe einer langsamen Mannigfaltigkeit die Fenichel-Normalform (2.13) besitzen.

7 Intermediäre Pulse

7.1 Konstruktion

Für $a = \frac{1}{2}$ ist $c^* = w^* = 0$. In dieser Situation koinzidieren die singulären Orbits Γ_{s0} und Γ_{f0} und bilden den heteroklinen Zyklus Γ_0 von p_0 nach p_1 . Krupa, Sandstede und Szmolyan [25] zeigen, dass in der Nähe von $(\varepsilon, c, a) = (0, 0, \frac{1}{2})$ homokline Orbits zu p_0 als Störungen von Γ_0 existieren. Diese Orbits liefern die intermediären Pulse.

Satz 7.1 ([25]) *In der Nähe des Punktes $(c, \varepsilon, a) = (0, 0, \frac{1}{2})$ existiert im Bereich $c > 0, \varepsilon > 0, a < \frac{1}{2}$ des (c, ε, a) -Raumes eine Fläche \mathcal{H} , so dass zu jedem Punkt $(c, \varepsilon, a) \in \mathcal{H}$ ein zu p_0 homokliner Orbit $\Gamma(c, \varepsilon, a)$ existiert. Dieser liegt nahe Γ_0 .*

Für die Fläche \mathcal{H} und die Orbits $\Gamma(c, \varepsilon, a)$ gilt

(i) Die Zuordnung $(c, \varepsilon, a) \mapsto \Gamma(c, \varepsilon, a)$ ist stetig und

$$\lim_{\substack{c, \varepsilon \rightarrow 0, \\ a \rightarrow 1/2}} \Gamma(c, \varepsilon, a) = \Gamma_0.$$

(ii) $\Gamma(c, \varepsilon, a)$ ist eindeutig bestimmt: Ist Γ ein homokliner Orbit von (4.1) zu Parametern (c, ε, a) hinreichend nahe an $(0, 0, \frac{1}{2})$ und liegt Γ in einer Umgebung von Γ_0 , so ist $(c, \varepsilon, a) \in \mathcal{H}$ und $\Gamma = \Gamma(c, \varepsilon, a)$.

(iii) Für festes $a \approx \frac{1}{2}$ ist die Kurve $\mathcal{H}_a = \{(c, \varepsilon) : (c, \varepsilon, a) \in \mathcal{H}\}$ gegeben als

$$\mathcal{H}_a = \{(c, \varepsilon_a(c)) : c \in [0, c^*(a)]\}$$

mit einer C^2 -regulären Funktion ε_a .

(iv) Zu jedem $a \approx \frac{1}{2}$ besitzt die Funktion ε_a ein eindeutiges Maximum in $[0, c^*(a)]$. Ferner ist $\varepsilon'_a(0) = 0$.

(v) Ist $a < \frac{1}{2}$, so nähert sich $\Gamma(c, \varepsilon, a)$ für $c \rightarrow 0$ dem ebenen Orbit Γ_{s0} an. Für $c \rightarrow c^*(a)$ konvergiert $\Gamma(c, \varepsilon, a)$ gegen den singulären Orbit Γ_{f0} .

Satz 7.1 wird in ähnlicher Weise wie Satz 6.1 bewiesen. Es seien dazu (x, y, z) die Koordinaten aus Abschnitt 6.1 und $\alpha := a - \frac{1}{2}$. Die Grundidee ist auch hier, dass ein homokliner Orbit zu p_0 genau dann existiert, wenn

$$\Pi(W^u(p_0) \cap \Sigma_1) \in W^s(S_L) \cap \Sigma_2. \quad (7.1)$$

In den (x, y, z) -Koordinaten lassen sich die Positionen von $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ und $W^s(S_L) \cap \Sigma_2$ nun in Abhängigkeit von α, c, δ und z darstellen als

$$\begin{aligned} W^u(p_0) \cap \Sigma_1 &= (\Delta, \nu_0\alpha + \nu_1c + \nu_2\delta, \mathcal{O}(\delta)) + R_1, \\ W^s(S_L) \cap \Sigma_2 &= (\nu_3\alpha + \nu_4c + \nu_5z, \Delta, z + \mathcal{O}(\delta)) + R_2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Der Restterm R_1 ist quadratisch in c, α und δ , der Restterm R_2 ist quadratisch in c, α, δ und z . Die Koeffizienten ν_i werden ähnlich wie im letzten Abschnitt durch Melnikov-Rechnungen bestimmt.

Lemma 7.2 ([25]) *Es gilt $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_5 < 0$ und $\nu_4 > 0$.*

Dabei gilt $\nu_0 = \nu_3$. Ist nämlich $(u(\xi), v(\xi))$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -f(u), \end{aligned} \quad (7.3)$$

so löst $(\tilde{u}(\xi), \tilde{v}(\xi)) := (u(-\xi), v(-\xi))$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= -\tilde{v} \\ \tilde{v}' &= f(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Andererseits ist $(\tilde{u}, -\tilde{v})$ eine Lösung von (7.3) und somit

$$\begin{aligned} (u_0, v_0) \in W^u(p_0) &\Leftrightarrow (u_0, -v_0) \in W^s(p_0), \\ (u_0, v_0) \in W^u(p_1) &\Leftrightarrow (u_0, -v_0) \in W^s(p_1). \end{aligned}$$

Demzufolge ist

$$\text{dist}(W^u(p_0), W^s(p_1)) = \text{dist}(W^u(p_1), W^s(p_0))$$

und $W^u(p_0) \cap \Sigma_1$ hängt für $c = \delta = w = 0$ auf dieselbe Weise wie $W^s(p_1) \cap \Sigma_2$ von α ab, d. h. $\nu_0 = \nu_3$.

Analog zu (6.7) ergeben sich hier die Darstellungen

$$\begin{aligned} W^u(p_0) \cap \Sigma_1 &= (\Delta, -\kappa_0\alpha - \kappa_1c - \kappa_2\delta, \mathcal{O}(\delta)), \\ W^s(S_L) \cap \Sigma_2 &= (-\kappa_0\alpha + \kappa_3c - \kappa_4z + \mathcal{O}(\delta), \Delta, z + \mathcal{O}(\delta)) \end{aligned} \quad (7.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= -\nu_0 + \mathcal{O}(\alpha), & \kappa_1 &= -\nu_1 + \mathcal{O}(c, \alpha, \delta, z), & \kappa_2 &= -\nu_2 + \mathcal{O}(c, \alpha, z, \delta), \\ \kappa_3 &= \nu_4 + \mathcal{O}(c, \alpha, \delta, z), & \kappa_4 &= -\nu_5 + \mathcal{O}(c, \alpha, \delta, z). \end{aligned}$$

Mit den Informationen über die Abbildung $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ aus Satz 2.8 gelangt man in diesem Fall zunächst auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} (b_1 e^{-\alpha_u^* T}, z) &= (-\kappa_0\alpha - \kappa_1c - \kappa_2\delta, \mathcal{O}(\delta)), \\ (b_2 e^{-\alpha_s^* T}, \hat{z}) &= (-\kappa_0\alpha + \kappa_3c - \kappa_4\hat{z}, \hat{z}) \\ \hat{z} &= z + \delta T + \mathcal{O}(\delta) \end{aligned} \quad (7.5)$$

und durch Einsetzen von \hat{z} schließlich auf

$$b_1 e^{-\alpha_u^* T} = -\kappa_0 \alpha - \kappa_1 c - \kappa_2 \delta \quad (7.6)$$

$$b_2 e^{-\alpha_s^* T} = -\kappa_0 \alpha + \kappa_3 c - \kappa_4 \delta T + \mathcal{O}(\delta). \quad (7.7)$$

Für festes $\alpha = \frac{1}{2} - a > 0$ definieren diese Gleichungen (7.6) und (7.7) $\varepsilon = \delta c$ als C^2 -Funktion von c ,

$$\varepsilon_a : [0, c^*(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

mit $\varepsilon_a(0) = \varepsilon_a(c^*(\alpha)) = 0$, $\varepsilon'_a(0) = 0$, $\varepsilon'_a(c^*(\alpha)) < 0$. Außerdem besitzt ε_a ein eindeutiges Maximum in $[0, c^*(\alpha)]$, woraus sich die Aussage von Satz 7.1 ergibt (vgl. [25]).

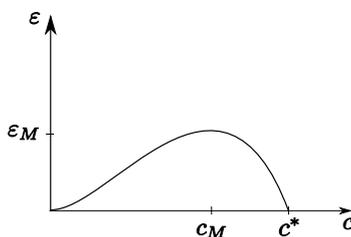


Abbildung 7.1: Die Kurve $(c, \varepsilon_a(c))$

7.2 Stabilitätswechsel

Es sei nun $a \lesssim \frac{1}{2}$. Der Orbit $\Gamma(c, \varepsilon_a(c))$ entspricht für $c \approx 0$ dann einem langsamen Puls Γ_s und für $c \approx c^*(a)$ einem schnellen Γ_f . Die Kurve $(c, \varepsilon_a(c))$ schafft im Parameterraum also eine Verbindung von langsamen zu schnellen Pulsen. Da die langsamen Pulse instabil und die schnellen Pulse stabil sind, muss entlang der Verbindungskurve ein Stabilitätswechsel stattfinden. Die Frage, in welchem Punkt dieser Stabilitätswechsel passiert, ist meines Wissens noch offen und auch in dieser Arbeit wird sie nicht geklärt. Jedoch werde ich erläutern, warum das Maximum (c_M, ε_M) der (c, ε) -Kurve ein geometrisch interessanter Punkt ist und zumindest die Vermutung nahe liegt, dass der Wechsel von instabil zu stabil genau in (c_M, ε_M) vor sich geht.

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 6.2 modifizieren wir die Schnittgleichungen (7.6) und (7.7) durch einen signierten Melnikov-Abstand r und betrachten mit $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ somit die Gleichungen

$$r = -b_1 e^{-\alpha_u^* T} - \kappa_0 \alpha - \kappa_1 c - \kappa_2 \delta \quad (7.8)$$

$$0 = -b_2 e^{-\alpha_s^* T} - \kappa_0 \alpha + \kappa_3 c - \kappa_4 \delta T + \mathcal{O}(\delta). \quad (7.9)$$

Diese Gleichungen (7.8) und (7.9) entsprechen der Situation, in der $W^u(p_0)$ und $W^s(p_0)$ sich auf Σ_1 genau mit der y -Differenz r verfehlen.

Wir formulieren nun eine zusätzliche Annahme, die eine für den Fall der schnellen Pulse in Abschnitt 6.2 bewiesene Eigenschaft in natürlicher Weise auf den Fall der intermediären Pulse überträgt:

(H) In einer Umgebung der Kurve $(c, \varepsilon_a(c))$ existieren glatte Funktionen $\theta(c, \varepsilon)$ und $\rho(c, \varepsilon)$ mit $\nabla \rho(c, \varepsilon) \neq (0, 0)$, so dass ein Quadrupel (c, ε, T, r) die Gleichungen (7.8), (7.9) genau dann löst, wenn $T = \theta(c, \varepsilon)$ und $r = \rho(c, \varepsilon)$ gilt.

Es sei nun ein $\varepsilon_0 \in [0, \varepsilon_M]$ fest gewählt und wieder $\rho_0(c) := \rho(c, \varepsilon_0)$. Ist $\varepsilon_0 < \varepsilon_M$, so existieren $c_l, c_r \in [0, c^*]$, $c_l < c_M < c_r$, mit $\varepsilon_a(c_l) = \varepsilon_0 = \varepsilon_a(c_r)$ und es gilt

$$\left. \frac{d\rho_0(c)}{dc} \right|_{c=c_l} > 0, \quad \left. \frac{d\rho_0(c)}{dc} \right|_{c=c_r} < 0. \quad (7.10)$$

Im Fall $\varepsilon_0 = \varepsilon_M$ ist entsprechend

$$\left. \frac{d\rho_0(c)}{dc} \right|_{c=c_M} = 0. \quad (7.11)$$

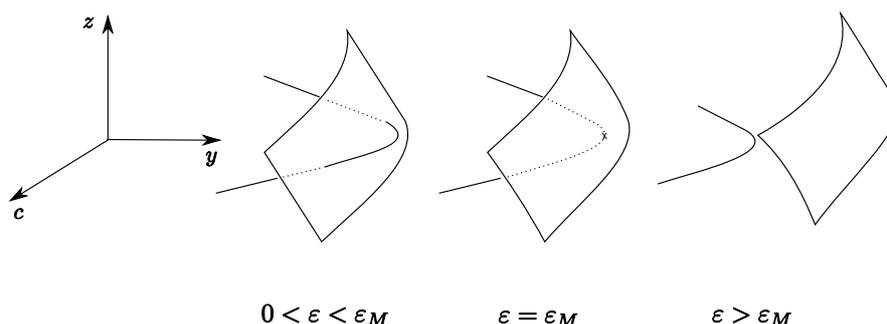


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung der Kurve $\bigcup_c W^u(p_0) \cap \Sigma_1 \times \{c\}$ und der Fläche $\bigcup_c W^s(p_0) \cap \Sigma_1 \times \{c\}$

Die Argumentation in Abschnitt 6.2 und allgemeiner die Lemmata 3.7 und 3.8 verdeutlichen, welche Bedeutung die Größen (7.10) und (7.11) für die Stabilität der entsprechenden Pulse haben können. Es gilt nämlich nun

Lemma 7.3 *Unter der Annahme (H) gilt für die Evans-Funktion $D(\lambda)$ des Pulses $\Gamma(c, \varepsilon_a(c))$*

$$\operatorname{sgn} D'(0) = \operatorname{sgn}(c - c_M).$$

Im Fall $c = c_M$ gilt insbesondere $D'(0) = 0$.

Auch wenn die Details noch fehlen, liefert Lemma 7.3 zumindest ein Indiz, dass alle Pulse $\Gamma(c, \varepsilon_a(c))$ mit $c < c_M$ instabil, alle mit $c > c_M$ stabil sein könnten ($\Gamma(c_M, \varepsilon_M)$ selbst wäre durch den doppelten Eigenwert $\lambda = 0$ ebenfalls instabil). Damit liegt die Vermutung nahe, dass der Wechsel von instabil zu stabil wirklich im Punkt (c_M, ε_M) geschieht.

Ob die Argumentation in dieser Form funktioniert und etwa $D'(0)D(+\infty) > 0$ tatsächlich – wie von Jones in [20] für den Fall der schnellen Pulse gezeigt – ein hinreichendes Kriterium für die Stabilität der intermediären Pulse ist, bleibt zu klären. Auch die Annahme (H), die ich trotz etlicher Anhaltspunkte bisher nicht entlang der gesamten $(c, \varepsilon_a(c))$ -Kurve beweisen konnte, wäre Gegenstand anschließender Untersuchungen.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Alexander, R. Gardner und C. Jones, *A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves*, J. Reine Angew. Math. **410** (1990), 167–212.
- [2] J. Carr, *Applications of centre manifold theory*, Applied Mathematical Sciences, vol. 35, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [3] R. G. Casten, H. Cohen und P. A. Lagerstrom, *Perturbation analysis of an approximation to the Hodgkin-Huxley theory*, Quart. Appl. Math. **32** (1975), 365–402.
- [4] W. A. Coppel, *Dichotomies in stability theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 629, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [5] B. Deng, *The Shilnikov problem, exponential expansion, strong λ -Lemma, C^1 -linearization, and homoclinic bifurcations*, J. Differential Equations **79** (1989), 189–231.
- [6] P. Drábek und J. Milota, *Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [7] J. W. Evans, *Nerve axon equations: I Linear approximations*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 877–885.
- [8] J. W. Evans, *Nerve axon equations: II Stability at rest*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 75–90.
- [9] J. W. Evans, *Nerve axon equations: III Stability of the nerve impulse*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 577–593.
- [10] J. W. Evans, *Nerve axon equations: IV The stable and the unstable impulse*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 1169–1190.
- [11] N. Fenichel, *Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1971), 193–226.
- [12] N. Fenichel, *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, J. Differential Equations **31** (1979), 53–98.
- [13] R. FitzHugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophys. J. **1** (1961), 445–466.
- [14] G. Flores, *Stability analysis for the slow travelling pulse of the FitzHugh-Nagumo system*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 392–399.

- [15] R. A. Gardner und K. Zumbrun, *The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), 797–855.
- [16] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [17] A. L. Hodgkin und A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J. Physiol. **117** (1952), 500–544.
- [18] C. Jones, N. Kopell und R. Langer, *Construction of the FitzHugh-Nagumo pulse using differential forms*, Patterns and dynamics in reactive media, IMA Vol. Math. Appl., vol. 37, Springer-Verlag, New York, 1991, 101–115.
- [19] C. K. R. T. Jones und N. Kopell, *Tracking invariant manifolds with differential forms in singularly perturbed systems*, J. Differential Equations **108** (1994), 64–88.
- [20] C. K. R. T. Jones, *Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system*, Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), 431–469.
- [21] C. K. R. T. Jones, *Geometric singular perturbation theory*, Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1609, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 44–118.
- [22] C. K. R. T. Jones, N. Kopell und T. J. Kaper, *Tracking invariant manifolds up to exponentially small errors*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 558–577.
- [23] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [24] R. D. Keynes, *The nerve impulse and the squid*, Scientific American **199** (1958), 83–90.
- [25] M. Krupa, B. Sandstede und P. Szmolyan, *Fast and slow waves in the FitzHugh-Nagumo equation*, J. Differential Equations **133** (1997), 49–97.
- [26] X.-B. Lin, *Using Melnikov's method to solve Shilnikov's problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser. A **116** (1990), 295–325.
- [27] J. D. Murray, *Mathematical biology I. An introduction*, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [28] J. Nagumo, S. Arimoto und S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axons*, Proc. IRE **50** (1962), 2061–2070.
- [29] R. Plaza und K. Zumbrun, *An Evans function approach to spectral stability of small-amplitude shock profiles*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **10** (2004), 885–924.
- [30] B. Sandstede, *Stability of travelling waves*, Handbook of dynamical systems II, North-Holland, Amsterdam, 2002, 983–1055.
- [31] P. Szmolyan, *Transversal heteroclinic and homoclinic orbits in singular perturbation problems*, J. Differential Equations **92** (1991), 252–281.

- [32] S. Wiggins, *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 105, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [33] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Texts in Applied Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [34] E. Yanagida, *Stability of fast travelling pulse solutions of the FitzHugh-Nagumo equations*, J. Math. Biol. **22** (1985), 81–104.

Zusammenfassung

Die FitzHugh-Nagumo-Gleichungen besitzen Puls-Lösungen zu unterschiedlichen Geschwindigkeiten c . In dieser Arbeit wird ein Überblick der Existenz und Stabilität dieser Pulse gegeben. Dazu werden die geometrische singuläre Störungstheorie (Fenichel-Theorie) und der Ansatz der Evans-Funktion in allgemeinerer Form dargestellt. Im eigentlichen Hauptteil der Arbeit werden dann zunächst die langsamen Pulse konstruiert und ein zu [14] alternativer Beweis ihrer Instabilität geführt. Die schnellen Pulse wurden in [25] durch Shilnikov-Koordinaten konstruiert. Dieser Existenzbeweis wird in der Arbeit dargestellt. Die Stabilität der schnellen Pulse wurde von Jones [20] durch geometrische Argumente bewiesen. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie die dafür wichtigen geometrischen Informationen aus den Shilnikov-Koordinaten gewonnen werden können. Desweiteren wird die ebenfalls in [25] entwickelte Konstruktion einer dritten Art von Pulsen bei $a = \frac{1}{2}$ wiedergegeben. Hierbei entsteht im Parameterraum eine Verbindungskurve zwischen langsamen und schnellen Pulsen, entlang derer es zu einem Stabilitätswechsel kommt. Wo dieser Wechsel von instabil zu stabil passiert, ist noch nicht geklärt. Es wird jedoch in dieser Arbeit erläutert, weshalb der Punkt des Stabilitätswechsels vermutlich im Maximum der Kurve liegt.

Erklärung

Ich versichere, dass ich vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der hier angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Leipzig, den 13. Juli 2009